

PROBLÈME I

Méthodes de refroidissement

Au travers de trois sous-parties indépendantes, on s'intéresse à divers procédés de refroidissement.

Partie A. Détente d'un gaz dans l'atmosphère

Une mole de dioxygène, considéré comme un gaz parfait d'indice adiabatique $\gamma = 7/5$, se trouve à la pression $P = 2,0$ bar et à la température $T = 280$ K. On lui fait subir une brusque détente dans l'atmosphère de pression supposée constante $P_0 = 1,0$ bar.

I.1) Par quel(s) qualificatif(s), parmi les suivants, peut-on qualifier la transformation que subit la mole de dioxygène ? On justifiera sa réponse.

réversible ; irréversible ; isotherme ; adiabatique ; isobare ; isochore

I.2) Par application du premier principe de la thermodynamique, déterminer la valeur de la température T' atteinte par le gaz à la fin de la détente. On remarquera que $P = 2 P_0$.

I.3) Calculer l'entropie créée lors de cette transformation. Commenter.

Données :

- constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- variation d'entropie d'un gaz parfait entre un état caractérisé par (T_i, P_i) et un état caractérisé par (T_f, P_f) :

$$\Delta S = nR \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) - nR \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right)$$

Partie B. Climatisation d'un local

Un cycle de Brayton inversé réalise un effet frigorifique. Lors de ce cycle, un gaz est comprimé, refroidi puis détendu. La température de fin de détente étant basse, ce gaz peut être utilisé pour refroidir une enceinte, soit par contact direct (notamment s'il s'agit d'air), soit par l'intermédiaire d'un échangeur.

Ce type de dispositif a été jusqu'à récemment très utilisé dans les avions pour assurer la climatisation des cabines en vol. Il est également utilisé pour climatiser les très grosses installations qui nécessitent de grandes quantités de fluide caloporteur.

Un cycle de Brayton inversé est formé de deux adiabatiques et de deux isobares :

- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique réversible faisant passer le gaz de la pression P_1 à la pression P_2 ;
- $2 \rightarrow 3$: refroidissement isobare dans un échangeur avec l'air extérieur ;
- $3 \rightarrow 4$: détente adiabatique réversible redonnant la pression P_1 au gaz ;
- $4 \rightarrow 1$: retour isobare au point 1 dans un échangeur avec le local refroidi.

Il est décrit par une quantité n d'air assimilé à un gaz parfait d'indice adiabatique γ . On note $a = \frac{P_2}{P_1}$ le rapport de compression du cycle.

I.4) Comparer les volumes aux points 2 et 3. Justifier sans calcul.

I.5) Tracer dans un diagramme de Clapeyron le cycle de Brayton inversé. Justifier le fait qu'il soit adapté pour décrire un climatiseur.

I.6) Pour les quatre transformations du gaz envisagées, exprimer le transfert thermique associé en fonction des températures T_i ($i = 1, 2, 3$ ou 4) nécessaires.

I.7) Soit η l'efficacité du climatiseur. Définir η puis l'exprimer en fonction des transferts thermiques des différentes transformations du cycle.

I.8) Exprimer de nouveau η uniquement en fonction de a et de γ .

Le climatiseur utilisé a pour efficacité $\eta = 4,6$ correspondant à $a = 2$ et $\gamma = 1,4$.

Ce climatiseur est installé dans un salon. L'air contenu dans la pièce, et que l'on désire refroidir, a une capacité thermique totale à volume constant $C_V = 1,3 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$; il se comporte comme un gaz parfait et les transformations sont supposées isochores.

L'air extérieur est un thermostat idéal de température $T_0 = 310\text{ K}$ constante. À l'état initial, la température T de la pièce vaut T_0 . On souhaite l'abaisser de 10 K en une demi-heure.

I.9) Déterminer la puissance mécanique que doit développer le moteur électrique du climatiseur.

Considérons maintenant une machine de Carnot réalisant un climatiseur fonctionnant entre des sources de température T_f et $T_c > T_f$.

I.10) Définir une machine de Carnot.

I.11) Montrer que l'efficacité du climatiseur de Carnot a pour expression $\eta_C = \frac{1}{T_c/T_f - 1}$.

I.12) Dans le cas de la climatisation du local, $T_f = T_1$ et $T_c = T_3$. Comparer η_C à η . Commenter.

Partie C. Utilisation des transitions de phase de l'eau

On met de l'eau chauffée à la température $T_1 = 300\text{ K}$ dans une bouteille de volume V_0 , en ne remplissant la bouteille qu'au quart de sa capacité. La bouteille est ensuite fermée. On suppose que l'air enfermé avec l'eau dans la bouteille est parfaitement sec à l'instant initial et qu'il n'y aura pas de transfert thermique avec l'extérieur.

On donne :

- $P_{\text{sat}} = 70,0 \times 10^2\text{ Pa}$, la pression de vapeur saturante de l'eau, supposée constante dans l'intervalle de température étudié ;
- $l_v = 3,00 \times 10^6\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau ;
- $c_e = 4,20 \times 10^3\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique de l'eau liquide ;
- $M_{\text{eau}} = 18\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ la masse molaire de l'eau ;
- $\rho = 1000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'eau liquide.

I.13) Qualitativement, que va-t-il se passer dans la bouteille ? Que peut-on prévoir quant à la température finale du système ?

I.14) Au vu de la valeur numérique de T_1 , que peut-on dire de la quantité de matière de l'eau liquide qui va s'évaporer ? Que peut-on en déduire sur le volume de ce liquide restant à l'équilibre ?

On considèrera dans ce problème comme négligeables les capacités thermiques massiques de l'eau vapeur et de l'air vis-à-vis de celle de l'eau liquide. On admettra aussi que la transformation a lieu approximativement à pression et volume constants. On appelle T_{eq} la température à l'équilibre.

I.15) Exprimer en fonction de V_0 , R , T_{eq} , P_{sat} et M_{eau} la masse d'eau $m_{e,v}$ qui a été vaporisée à l'équilibre.

Remarque : l'air ne joue aucun rôle dans cette question, on peut considérer qu'il n'y a que de l'eau dans la bouteille.

I.16) À l'aide d'un bilan énergétique et en négligeant tout transfert thermique avec l'extérieur, en déduire une expression de la variation de température $\Delta T = T_{\text{eq}} - T_1$. L'évaluer numériquement en supposant que $\Delta T \ll T_{\text{eq}}$.

Dans un laboratoire, pour obtenir un effet de refroidissement accru, on place dans un récipient aux parois athermanes (interdisant les transferts thermiques) une masse m_0 d'eau liquide, à la température T_0 . La vapeur formée est éliminée par une pompe qui l'aspire lentement.

I.17) Expliquer qualitativement ce qui va se passer.

I.18) On cherche à évaluer les variations de masse de l'eau liquide. L'évaporation d'une masse dm d'eau provoque une variation de température dT à l'intérieur du récipient. Écrire l'équation différentielle liant $m(T)$, dm et dT .

I.19) Pour le domaine de température considérée, l_v est une fonction affine de la température : $l_v = a - bT$, avec a et b des coefficients positifs. En déduire l'expression de la masse d'eau $m(T)$ présente à la température T .

PROBLÈME II

Expulsion d'un projectile par une arme à feu

Le principe d'une arme à feu consiste à expulser un projectile à très haute vitesse au moyen d'un gaz produit par la combustion d'un composé chimique. On en présente ici un modèle très simplifié.



- Après combustion de la poudre, le mélange d'air et de gaz brûlés occupe le volume $V_1 = 5 \text{ cm}^3$, à la pression $P_1 = 600 \text{ bar}$ et la température $T_1 = 2300 \text{ K}$.
- Le projectile agit comme un piston étanche de masse $m = 10 \text{ g}$, initialement au repos, qui peut se translater le long du canon.
- L'expulsion du projectile s'accompagne d'une détente adiabatique et réversible des gaz internes. Le volume maximal de la chambre est noté V_2 . Le rapport volumétrique de la chambre est $\alpha = \frac{V_2}{V_1} = 20$.
- Les gaz internes sont supposés parfaits, de coefficient adiabatique $\gamma = 1,1$ indépendant de la température et de la pression.
- L'atmosphère est à la pression $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ et à la température $T_0 = 293 \text{ K}$.

Question : estimer la vitesse d'expulsion v_s du projectile.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie même si elle n'a pas abouti, car elle est valorisée dans le barème.

PROBLÈME I

Méthodes de refroidissement

Partie A. Détente d'un gaz dans l'atmosphère

I.1) La détente étant brutale, le système est loin à chaque instant d'un état d'équilibre, la détente est donc **irréversible** et en aucun cas réversible.

Lors de la détente brutale, la température n'est pas nécessairement définie à chaque instant dans le fluide, la transformation n'est donc pas isotherme.

La détente étant rapide, on peut certainement négliger les transferts thermiques avec l'extérieur et considérer la transformation comme **adiabatique**.

Lors de la détente, ni le volume ni la pression ne se conserve la transformation n'est donc ni isochore ni isobare, en revanche on pourrait la qualifier de monobare.

I.2) On applique le premier principe pour le gaz parfait qui subit la détente adiabatique : $\Delta U = W$.

Pour un gaz parfait $\Delta U = C_V(T' - T) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T' - T) = \frac{5}{2}nR(T' - T)$.

Le travail des forces de pression extérieure est $W = -P_0(V_f - V_i)$. D'après la loi des gaz parfaits, on a $V_f = nRT'/P_f$ et $V_i = nRT/P = nRT/(2P_0)$. L'équilibre mécanique final impose $P_f = P_0$, on a donc $W = nR(T' - T/2)$.

Le premier principe donne pour conclure : $T' = \frac{6}{7}T = 240 \text{ K}$.

I.3) Pour une transformation adiabatique, le deuxième principe implique que la variation d'entropie est égale à l'entropie créée : $\Delta S = S_c$.

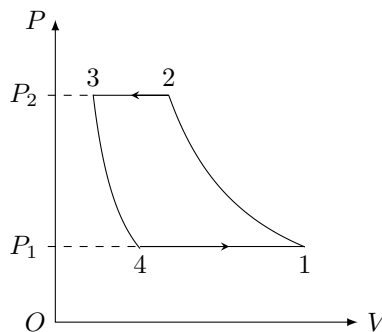
La variation d'entropie du gaz est obtenue en appliquant la formule : $S_c = \frac{7}{2}nR \ln(6/7) - nR \ln(1/2) = 1,28 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

L'entropie créée est donc positive, ce qui confirme que la transformation est irréversible.

Partie B. Climatisation d'un local

I.4) À pression constante, le volume d'un gaz parfait est proportionnel à la température. Lors d'un refroidissement isobare, le volume diminue donc : $V_3 < V_2$.

I.5) Le sens de parcours du cycle est le sens trigonométrique, le fluide reçoit donc du travail : la machine est un récepteur, ce qui est le cas d'un climatiseur.



I.6) Les transformations $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$ sont des adiabatiques : $Q_{12} = Q_{34} = 0$.

La transformation $2 \rightarrow 3$ est une isobare, elle est donc monobare avec équilibre mécanique initial et final. On peut utiliser le premier principe pour l'enthalpie : $\Delta H = Q + W'$. En l'absence d'autres travaux que ceux des forces de pression ($W' = 0$),

on a : $Q_{23} = \Delta H_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$.

De la même façon pour la transformation $4 \rightarrow 1$: $Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_4)$.

I.7) L'échange énergétique utile est le transfert thermique prélevé à la source froide, c'est-à-dire ici Q_{41} . L'échange énergétique coûteux est le travail reçu W . L'efficacité du climatiseur est donc définie par $\eta = \frac{Q_{41}}{W}$.

D'après le premier principe sur un cycle : $\Delta U = 0 = W + Q_{41} + Q_{23}$ donc $W = -Q_{41} - Q_{23}$ donc $\eta = \frac{-1}{1 + Q_{23}/Q_{41}}$.

I.8) On remplace les expressions des transferts thermiques : $\eta = \frac{-1}{1 + \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4}}$.

La transformation $1 \rightarrow 2$ étant adiabatique et réversible, les lois de Laplace s'applique à un gaz parfait : $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cste}$. On en déduit $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1-\gamma} = T_1 a^{1-1/\gamma}$.

De même pour la transformation $3 \rightarrow 4$: $T_3 = T_4 a^{1-1/\gamma}$.

On a donc $T_3 - T_2 = (T_4 - T_1) a^{1-1/\gamma}$.

Pour conclure, $\eta = \frac{1}{a^{1-1/\gamma} - 1}$.

I.9) Le premier principe appliqué à l'air du salon (qui est au repos macroscopique) s'écrit $\Delta U = Q + W = Q$ car la transformation est isochore. Pour un gaz parfait $\Delta U = C_V \Delta T$ avec ici $\Delta T = -10 \text{ K}$.

Le transfert thermique reçu de la source froide (la pièce à réfrigérer) par le fluide circulant dans le climatiseur est l'opposé de celui qu'il fournit à l'air de la pièce, c'est-à-dire $Q_{41} = -Q = -C_V \Delta T$.

Le travail que doit recevoir la machine est $W = Q_{41}/\eta = -C_V \Delta T/\eta$. Ce travail doit être fourni en une durée $\Delta t = 1,8 \times 10^3 \text{ s}$

donc la puissance mécanique du moteur d'alimentation du climatiseur est $\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = -\frac{C_V \Delta T}{\eta \Delta t} = 1,6 \text{ kW}$.

I.10) Une machine de Carnot est une machine caractérisée par un cycle contenant deux isothermes au contact des sources et deux adiabatiques, qui est parcouru de manière réversible dans le sens adapté.

I.11) Soit un cycle de Carnot recevant un travail W et des transferts thermiques Q_f de la source froide et Q_c de la source chaude.

Le premier principe, sur un cycle, s'écrit $\Delta U = 0 = W + Q_f + Q_c$ donc $W = -Q_f - Q_c$.

Le deuxième principe sur un cycle réversible s'écrit $\Delta S = 0 = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c}$.

L'efficacité d'un climatiseur de Carnot est définie comme précédemment : $\eta_C = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-Q_f - Q_c} = \frac{1}{-1 - Q_c/Q_f} = \frac{1}{T_c/T_f - 1}$.

I.12) $T_c/T_f = T_3/T_1 < T_2/T_1 = a^{1-1/\gamma}$.

$T_c/T_f - 1 > a^{1-1/\gamma} - 1 > 0$ car $a > 1$ et $\gamma > 1$ donc $1 - 1/\gamma > 0$.

On inverse : $\frac{1}{T_c/T_f - 1} < \frac{1}{a^{1-1/\gamma} - 1}$ c'est-à-dire $\eta_C > \eta$.

La machine réelle a une efficacité inférieure à celle de la machine de Carnot correspondante, ce qui est une manifestation du théorème de Carnot qui stipule que la machine de Carnot a l'efficacité optimale.

Partie C. Utilisation des transitions de phase de l'eau

I.13) On va observer une **évaporation partielle** de l'eau liquide pour atteindre la pression de vapeur saturante. L'évaporation nécessitant de l'énergie, la température dans la bouteille va diminuer.

I.14) On peut penser qu'une faible quantité d'eau va s'évaporer et que les volumes des phases liquide et gazeuse vont être quasiment préservés.

I.15) La vapeur d'eau en équilibre avec le liquide est nécessairement à la pression de vapeur saturante et occupe un volume $V_g = 3V_0/4$.

D'après la loi des gaz parfaits $P_{\text{sat}}V_g = n_gRT_{\text{eq}}$ donc : $m_{e,v} = n_g M_{\text{eau}} = \frac{3M_{\text{eau}}P_{\text{sat}}V_0}{4RT_{\text{eq}}}.$

I.16) La transformation ayant lieu à pression totale constante, le premier principe pour l'enthalpie s'applique : $\Delta H = Q + W'$. $Q = 0$ car on suppose qu'il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur et $W' = 0$ car aucun travail n'est exercé. On a donc $\Delta H = 0$.

On imagine le chemin suivant pour conduire à l'état final (tout chemin donne la même variation d'enthalpie puisque c'est une fonction d'état) : une masse $m_{e,v}$ d'eau s'évapore à la température T_1 , puis le système voit sa température évoluer jusqu'à T_{eq} . La variation d'enthalpie de la première étape est $\Delta H_1 = m_{e,v}l_v$ et celle de la deuxième étape $\Delta H_2 = C_p(T_{\text{eq}} - T_1) \approx m_{e,\ell}c_e(T_{\text{eq}} - T_1)$ en négligeant les capacités thermiques des gaz. La masse d'eau restée liquide est $m_{e,\ell} = \rho \times V_0/4$.

Il vient : $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = m_{e,v}l_v + (1/4)\rho \times V_0c_e(T_{\text{eq}} - T_1) = 0$.

Ainsi : $\Delta T = T_{\text{eq}} - T_1 = -\frac{3M_{\text{eau}}P_{\text{sat}}l_v}{\rho c_e RT_{\text{eq}}} \approx -\frac{3M_{\text{eau}}P_{\text{sat}}l_v}{\rho c_e RT_1} = -0,11 \text{ K}.$

I.17) La vapeur d'eau formée est extraite par la pompe. Pour maintenir l'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur, l'eau s'évapore à nouveau et ainsi de suite créant un effet cumulatif, conduisant à un refroidissement prolongé.

I.18) En supposant à nouveau la conservation de l'enthalpie, on reprend le même chemin qu'à la question I.16) : une masse $-dm$ s'évapore (signe $-$ car dm est la variation de la masse m d'eau restée liquide) puis la température change de dT . $dH_1 = -dml_v$ et $dH_2 = C_p dT \approx mc_e dT$ donc $mc_e dT = dml_v$.

I.19) Connaissant $l_v(T)$, on peut séparer les variables m et T : $\frac{dm}{m} = c_e \frac{dT}{a - bT}$. On intègre entre la situation initiale (T_0, m_0) jusqu'à une situation quelconque (T, m) :

$$\int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = c_e \int_{T_0}^T \frac{dT}{a - bT}$$

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{c_e}{b} \ln\left(\frac{a - bT}{a - bT_0}\right)$$

On en déduit l'expression de la masse : $m(T) = m_0 \left(\frac{a - bT}{a - bT_0}\right)^{-c_e/b}.$

PROBLÈME II

Expulsion d'un projectile par une arme à feu

Considérons le système {projectile+gaz emprisonné}, dans le référentiel lié au fusil, que l'on considère comme galiléen (le fusil est immobile dans le référentiel terrestre).

Le système est soumis aux actions mécaniques suivantes :

- le poids $\vec{P}$ qui est conservatif;
- la réaction du canon $\vec{R}$, qui ne travaille pas si on la suppose normale en négligeant les frottements solides;
- la force de pression de l'air atmosphérique : $\vec{F}_{\text{atm}}$

Le premier principe appliqué au système entre l'instant initial et l'instant final lorsque le projectile sort du fusil, s'écrit :

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_m = Q + W(\vec{F}_{\text{atm}}).$$

- On suppose pour simplifier que la température du projectile ne varie pas si bien que la variation de l'énergie interne est celle du gaz :

$$\Delta U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

en utilisant la loi des gaz parfaits.

La détente étant adiabatique et réversible pour le gaz supposé parfait, il obéit à la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{cste}$ soit ici $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$. Ainsi $P_2 V_2 = P_1 V_1 (V_1/V_2)^{\gamma-1} = P_1 V_1 \alpha^{1-\gamma}$.

Ainsi on obtient $\Delta U = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} (\alpha^{1-\gamma} - 1)$.

- la masse du gaz est négligeable devant celle du projectile, la variation d'énergie mécanique est celle du projectile. On suppose le canon horizontal, si bien que l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas. La vitesse du projectile étant initialement nulle, on obtient $\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{c,f} = \frac{1}{2} m v_s^2$.
- La transformation est supposée adiabatique donc $Q = 0$ (c'est supposé pour le gaz, on le suppose également pour le projectile car l'expulsion est très rapide).
- $W(\vec{F}_{\text{atm}}) = - \int_{V_1}^{V_2} P_0 dV = P_0 (V_1 - V_2) = P_0 V_1 (1 - \alpha)$.

Pour conclure, on a $\frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} (\alpha^{1-\gamma} - 1) + \frac{1}{2} m v_s^2 = P_0 V_1 (1 - \alpha)$ d'où :

$$v_s = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} (1 - \alpha^{1-\gamma}) - P_0 V_1 (\alpha - 1) \right)} = 392 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ce résultat, supérieur à la vitesse du son, paraît trop élevé. L'hypothèse de réversibilité n'est pas réalisée en pratique, ni celle de constance de la température du projectile.