Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 20 Mars 2026.

DS 7, Durée 3h, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1

1. Calculer le développement à la précision $o(x^3)$ pour $x \to 0$ de l'expression $\sinh(\tanh(x))$ en justifiant proprement.
2. Calculer le développement à la précision $o(x^4)$ pour $x \to 0$ de l'expression $\ln(\cosh(x))$ en justifiant proprement.
3. Calculer le développement à la précision $o(x^4)$ pour $x \to 0$ de l'expression $\arctan(\cos(x))$ en justifiant proprement.

Exercice 2

On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation d'inconnue x : $x + \ln(x) = n$.

1. Démontrer que cette équation admet, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, une unique solution $x_n \in]0, +\infty[$, puis étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (monotonie, limite).
2. Démontrer que $x_n \sim_{n\to+\infty} n$.
3. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)$. *On pourra poser a_n tel que $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$.*
4. Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.
5. En admettant éventuellement le résultat de la question précédente, dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

a. $x_n \sim_{n\to+\infty} n - \ln(n)$ **b**. $x_n \sim_{n\to+\infty} n - 2\ln(n)$

c. $x_n = n - \ln(n) + o(\sqrt{\ln n})$ **d**. $x_n = n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3 \ , u(e_2) = 3e_2 \ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de ker u. L'endomorphisme u est-il injectif ? Quel est le rang de u ?
2. Déterminer une base de Im u.
3. Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \operatorname{Im}\ u$.

Exercice 4

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'espace vectoriel (réel) des polynômes réels de degrés au plus n : $\mathbb{R}_n[X]$ et l'endomorphisme Δ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Il n'est pas demandé de vérifier ces points.

1. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$
2. Calculer le noyau et le rang de Δ.
3. Montrer que $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puis que $\operatorname{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On considère pour la suite la famille $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définie par $H_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

4. Montrer que $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Monter qu'on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\Delta(H_k) = H_{k-1}$.
6. En déduire que si $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$:

$$(\Delta^j(H_i))(0) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'on a :

$$P = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k(P))(0) H_k$$

8. Montrer que si $i \in \mathbb{Z}$ (*On pourra distinguer les cas positifs et négatifs*) et $k \in [\![0,n]\!]$ alors $H_k(i) \in \mathbb{Z}$.
9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0), P(1), \dots, P(n)$ sont des entiers relatifs.
   Montrer que les nombres $(\Delta^k(P))(0)$ sont des entiers relatifs pour $k \in [\![0,n]\!]$.
   On pourra faire une récurrence à rédiger proprement.
10. En déduire que, pour tout polynôme P de degré au plus n, les assertions suivantes sont équivalentes :
    (a) P prend des valeurs entières relatives sur $\mathbb{Z}$.
    (b) P prend des valeurs entières relatives sur $\{0, \dots, n\}$.
    (c) Les coordonnées de P dans la base $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ sont des entiers relatifs.
    (d) P prend des valeurs entières relatives sur $n+1$ entiers relatifs consécutifs.
11. Si $a \in \mathbb{R}$, on note E_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \to P(X+a) \end{cases}$.
    En notant que $\Delta = E_1 - E_0$, montrer que l'on a pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$(\Delta^k P)(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i)$$