Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 20 Mars 2026.

DS 7, Durée 3h, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1

1.
$$\sinh(\tanh(x)) = x - x^3/6 + o(x^3)$$

2.
$$\ln(\cosh(x)) = x^2/2 - x^4/12 + o(x^3)$$

3.
$$\arctan(\cos(x)) = \pi/4 - x^2/4 - x^4/24 + o(x^4)$$

Exercice 2

On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation d'inconnue x : $x + \ln(x) = n$.

1. Par étude de fonction, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie croissante et tend vers $+\infty$.
2. $x_n \sim x_n + \ln(x_n) = n$.
3. $x_n - n + \ln(x_n) = \ln(n/x_n) \to 0$ donc :
$$x_n - n - \ln(n) = o\big(\ln(n)\big)$$
4. $x_n - n + \ln(x_n) = \ln(n/x_n) = \ln(1 + (n - x_n)/n) \sim (n - x_n)/n \ln(n)/n$ donc :
$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

   f
5.
   a. $x_n \sim_{n\to+\infty} n - \ln(n)$: Vrai
   b. $x_n \sim_{n\to+\infty} n - 2\ln(n)$: Vrai
   c. $x_n = n - \ln(n) + o(\sqrt{\ln n})$: Vrai
   d. $x_n = n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n}$: Faux

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3\ , u(e_2) = 3e_2\ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Par exemple : $(2e_1 - e_3)$ base de ker u. L'endomorphisme u est-il injectif ? NON.
   $\mathrm{rg}(u) = 2$
2. $((-e_1 + e_3), e_2)$ base de Im u.
3. ker $u \cap$ Im $u = \{0\}$ par suite avec le théorème du rang :
$$E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$$

Exercice 4

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'espace vectoriel (réel) des polynômes réels de degrés au plus n : $\mathbb{R}_n[X]$ et l'endomorphisme Δ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Il n'est pas demandé de vérifier ces points.

1. $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$
2. Le noyau de Δ est l'espace des polynômes périodiques de période 1 c'est à dire les constantes. Par suite :
$$\mathrm{rg}(\Delta) = n$$
3. Par considération du terme de degré n qui s'annule : $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et avec le rang : $\mathrm{Im}(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On considère pour la suite la famille $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définie par $H_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

4. Les degré sont échelonnés donc : $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. A près simplification : pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\Delta(H_k) = H_{k-1}$.
6. $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$:
   Si $j > i$, $\Delta^j(H_i) = 0$.
   Si $j = i$, $\Delta^j(H_i) = H_0 = 1$.
   Si $j < i$, $\Delta^j(H_i) = H_{i-j}$ dont 0 est racine.
   Donc dans tous les cas :
$$(\Delta^j(H_i))(0) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :
$$P = \sum_{k=0}^{n} (\Delta^k(P))(0) H_k$$
   Car elle est vraie pour les polynômes $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ d'après la question précédente et par prolongement linéaire.
8. Si $i \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$
   alors $H_k(i) = \binom{i}{k} \in \mathbb{Z}$ et $H_k(-i) = (-1)^k \binom{i+k-1}{k} \in \mathbb{Z}$
9. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0), P(1), \dots, P(n)$ sont des entiers relatifs.

   Par récurrence : pour $k \in [\![0,n]\!]$:
   $\Delta^k(P)(0), \Delta^k(P)(1), \dots, \Delta^k(P)(n-k)$ sont des entiers relatifs.

   (*Voir la définition de* Δ ...)

   Il suit : les nombres $(\Delta^k(P))(0)$ sont des entiers relatifs pour $k \in [\![0,n]\!]$

10. On fixe P.

    Il est clair que $(a) \implies (b) \implies (d)$.

    Les questions 7,8 et 9 montrent que $(c) \iff (a)$

    Si on a (d), P prenant des valeurs dans $\mathbb{Z}$ de k à $k+n$ vérifie que $P(X-k)$ à des coordonnées entières relatives dans la base $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et donc (question 8) il prend des valeurs entières relatives sur $\mathbb{Z}$. Ainsi, on a (a).

11. Par la formule du binôme appliquée à $(E_1-E_0)^k$, on pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$(\Delta^k P)(X) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} E_1^i(P(X)) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(X+i)$$

    qui, pour $X=0$ donne la formule proposée.