

Fiche 59 : Matrices.

Exercice 1

On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les noyaux : $\ker(A - 2I_3)$, $\ker(A + 2I_3)$ et $\ker(A - 4I_3)$.
2. Montrer que la réunion des 3 bases précédentes forme une base $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}$ et vérifier qu'elle est diagonale. Préciser la relation qui lie P , P^{-1} , A et D (on ne demande pas de calculer P^{-1} ici).
4. Calculer, si n est un entier naturel non nul la matrice A^n .
5. Vérifier la relation : $A^3 - 4A^2 - 4A + 16I_3 = 0$. On pourra utiliser la matrice D .

Exercice 2

Soit E un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$, $p \in \mathbb{N}^*$.

1. $e \in E$ est tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$, montrer que la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre.
2. En déduire que $p \leq n$.
3. Dans le cas où $n = p$, déterminer la matrice de f dans la base $B = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$.
4. Étudier le cas de la dérivation D dans l'espace $E = \mathbb{R}_{n-1}$: déterminer une base de la forme précédente.

Exercice 3

On considère dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer J^2 puis calculer en fonction de A , I , et $n \in \mathbb{N}$ la valeur de A^n .

On considère les suites données par $p_0 = 1, q_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{n+1} = 2p_n + q_n \\ p_{n+1} = p_n + 2q_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose aussi : $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.