

Fiche 60 : Td du 26-03.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Justifier que f est dérivable sur $] -1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Rappeler le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 3 puis le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$.
4. En déduire les deux égalités

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} e - e\frac{x}{2} + e\frac{11}{24}x^2 + o(x^2).$$

5. En déduire la limite de la fonction f en 0. On prolonge f par cette valeur en 0.
6. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{e}{2}$.
7. Déterminer un équivalent de $f(x) - e$ lorsque x tend vers 0.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.

8. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e et donner un équivalent de la suite $(u_n - e)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2u_{2n} - u_n$.

9. Montrer que $v_n - e \sim -\frac{11e}{48n^2}$. Quel est l'intérêt de cette suite ?

Exercice 2

On considère si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, la fonction

$$f_n(x) = x\sqrt{1 + \frac{x}{n}}$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \geq 0$ tel que $f_n(x_n) = 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante et majorée par 1 puis que pour $n \rightarrow \infty : x_n \rightarrow 1$.
3. Écrire un développement de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sous la forme :

$$x_n = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{\alpha}{n^2} + o_{n \rightarrow \infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ à préciser})$$

Exercice 3

Pour tout n entier naturel non nul, on donne

$$f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}$$

1. Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ qu'on précisera.