

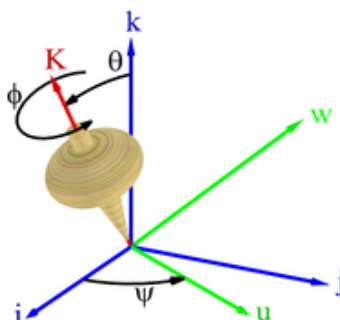
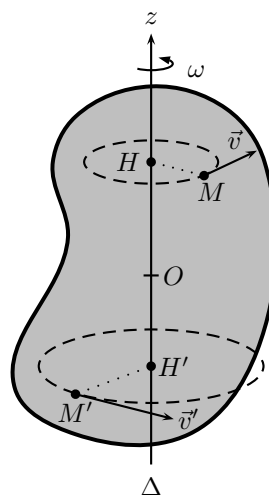
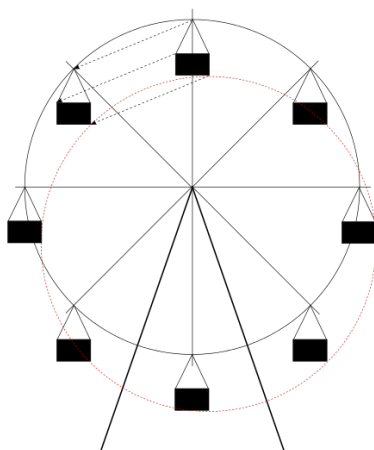
Chapitre P17

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Notions et contenus	Capacités exigibles
Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.
Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
Couple.	Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Liaison pivot.	Définir un couple.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Pendule pesant.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
	Établir l'équation du mouvement.
	Établir une intégrale première du mouvement.
	<i>Capacité expérimentale : réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.</i>
	<i>Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.</i>
Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Questions de cours

- Définir et caractériser le mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
- Définir le moment cinétique d'un système par rapport à un point puis par rapport à un axe.
- Exprimer le moment cinétique d'un solide par rapport à son axe de rotation puis définir le moment d'inertie.
- Définir le moment d'une force par rapport à un point puis par rapport à un axe et donner son expression avec le bras de levier.
- Définir un couple et le caractériser par son moment.
- Énoncer et démontrer le théorème du moment cinétique pour un point matériel, puis pour un ensemble de points matériels.
- Énoncer et démontrer le théorème scalaire du moment cinétique.
- Établir l'équation différentielle du mouvement d'un pendule pesant ; caractériser les petites oscillations.

Document 1. Angles d'Euler**Document 2. Mouvements de translation et de rotation autour d'un axe fixe****Document 3. Moments d'inertie de solides homogènes**

- solide de taille négligeable par rapport à sa distance L de l'axe : $J_{\Delta} = mL^2$
- barre de longueur L par rapport à un axe perpendiculaire passant par une extrémité : $J_{\Delta} = (1/3)mL^2$
- barre de longueur L par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre : $J_{\Delta} = (1/12)mL^2$
- cercle (ou cylindre vide) de rayon R par rapport à son axe de révolution : $J_{\Delta} = mR^2$;
- cercle de rayon R par rapport à un diamètre : $J_{\Delta} = (1/2)mR^2$;
- disque (ou cylindre plein) de rayon R par rapport à son axe de révolution : $J_{\Delta} = (1/2)mR^2$;
- disque de rayon R par rapport à un diamètre : $J_{\Delta} = (1/4)mR^2$;
- sphère vide de rayon R par rapport à un diamètre : $J_{\Delta} = (2/3)mR^2$.
- sphère pleine de rayon R par rapport à un diamètre : $J_{\Delta} = (2/5)mR^2$.

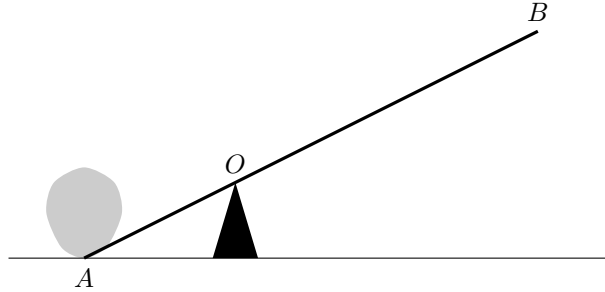
Exercice de cours A. Pendule simple

Retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement d'un pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique.

Exercice de cours B. Principe du levier

Archimède (250 avant notre ère) est le premier à établir la théorie physique du levier et de la balance. Il aurait dit : « Donnez-moi un point fixe et un levier, et je soulèverai la Terre. »

Prenons une situation plus modeste, comme ci-dessous où $AO = 50 \text{ cm}$ et $OB = 1,5 \text{ m}$.

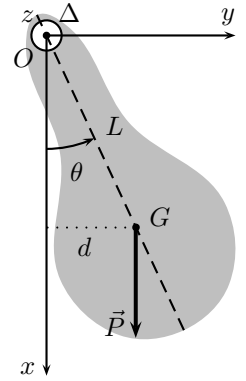


Quelle doit être la masse m d'Archimède s'il veut soulever un rocher de masse $M = 300 \text{ kg}$ en se suspendant au levier ?

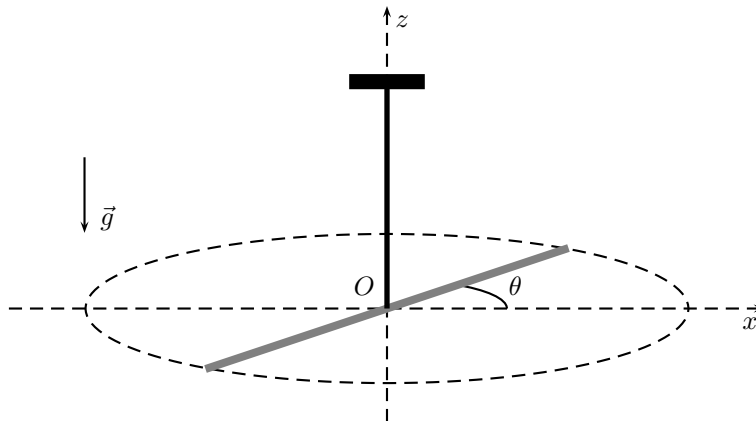
Exercice de cours C. Étude du pendule pesant

On étudie un pendule pesant en faisant les hypothèses suivantes : l'action de l'air est négligeable et la liaison pivot est parfaite. On repère sa position par l'angle θ que fait la droite (OM) par rapport à l'axe vertical.

1. Que peut-on dire de la droite d'action du poids à l'équilibre ? En déduire la valeur de θ à l'équilibre.
2. Établir l'équation différentielle pour l'angle θ lorsque le pendule est en mouvement.
3. Que devient cette équation pour les petits angles ? En déduire la période propre des oscillations.
4. En multipliant par $\dot{\theta}$ puis en intégrant, établir une *intégrale première* du mouvement (fonction de θ et $\dot{\theta}$ restant constante lors du mouvement).

**Exercice de cours D. Pendule de torsion**

Un pendule de torsion est constitué d'une barre horizontale fixée à un fil de torsion vertical attaché en son centre O . Lorsqu'il est tordu d'un angle θ , le fil exerce sur la barre un couple de torsion par rapport à l'axe Oz confondu avec le fil : $\Gamma = -C\theta$ où C est la constante de torsion.



1. Obtenir l'équation différentielle décrivant l'évolution temporelle de l'angle θ .
2. Donner l'expression de la période T_0 des oscillations en fonction de C et J .
3. Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ du couple de torsion et montrer qu'on peut définir une énergie potentielle de torsion $\mathcal{E}_{pt}$ telle que $\frac{d\mathcal{E}_{pt}}{dt} = -\mathcal{P}$.
4. Retrouver l'équation différentielle par une méthode énergétique.

Exercice 1. Mouvement de la Lune (★)

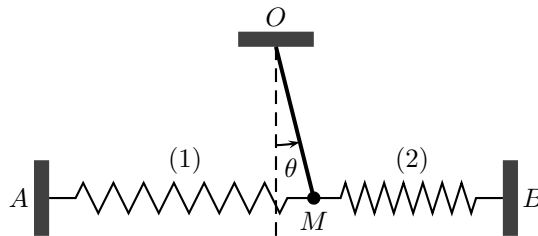
Dans le référentiel géocentrique, la Lune tourne autour du centre de la Terre en 27,3 jours sur une orbite quasi circulaire de rayon $d_{TL} = 3,84 \times 10^5$ km. Au cours de son mouvement, la Lune montre toujours la même face à la Terre.

1. Représenter quelques positions de la Lune lors de son mouvement de révolution autour de la Terre.
2. Dans le référentiel géocentrique, le mouvement de la Lune est-il un mouvement de translation circulaire ou de rotation autour d'un axe fixe? Donner la valeur de la grandeur caractéristique de ce mouvement.
3. Même question dans le référentiel sélénocentrique, qui a les même axes de référence que le référentiel géocentrique, mais a pour origine le centre de la Lune (le nom vient de *Selene*, la déesse grecque de la Lune).

Exercice 2. Oscillations d'un pendule lié à un ressort (★)

Un pendule est constitué d'un point matériel M de masse m fixé à l'extrémité d'une tige rigide de masse négligeable et de longueur L . Ce fil est accroché au point O , fixe par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, supposé galiléen. M est également attaché à deux ressorts (1) et (2) identiques, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 fixés entre deux points A et B distants de $2\ell_0$ de telle sorte qu'ils sont au repos lorsque le pendule est vertical.

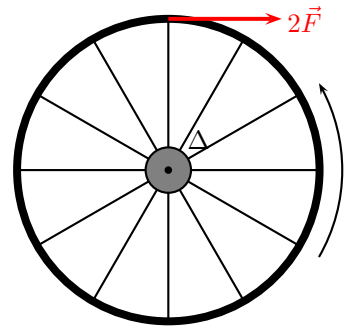
On déplace légèrement M par rapport à la verticale puis on le laisse évoluer librement. Il oscille alors en décrivant un petit arc de cercle de centre O , dans le plan vertical, et on repère sa position par l'angle θ avec la verticale. Cet angle restant toujours faible, on pourra considérer que les ressorts restent horizontaux.



1. Exprimer les moments en O des forces exercées sur le point M .
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ . En déduire la pulsation propre des petites oscillations.

Exercice 3. Freinage d'une roue de vélo (★★)

On considère une roue de bicyclette à rayons de rayon R et de masse m dont on étudie l'arrêt de la rotation par des freins à étrier. Chacun des deux freins exerce sur la jante une force d'intensité F que l'on considérera constante tant que la roue tourne. Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu fixe, noté Δ . On néglige les frottements sur l'axe.



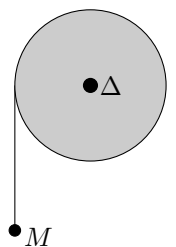
1. Parmi la liste du document 3, quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue? En déduire l'expression du moment d'inertie.
2. Déterminer le moment résultant des forces de freinage par rapport à l'axe Δ .
3. En déduire l'équation différentielle d'évolution de la vitesse angulaire de la roue.
4. La résoudre pour $\omega(t=0) = \omega_0$. En déduire l'angle duquel la roue a tourné lorsque'elle s'arrête.
5. Déterminer l'intensité de la force de freinage nécessaire pour arrêter la roue en un moins d'un tour. Application numérique avec $R = 33$ cm, $m = 1,60$ kg, $\omega_0 = 17$ rad $\cdot$ s $^{-1}$.

Exercice 4. Poulie massive (★★)

Un point matériel de masse $m = 5,0$ kg est suspendu à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie homogène de masse $m_p = 1,0$ kg et de rayon $R = 10$ cm en liaison pivot parfaite autour de son axe avec un support fixe. Le fil ne glisse pas sur la poulie.

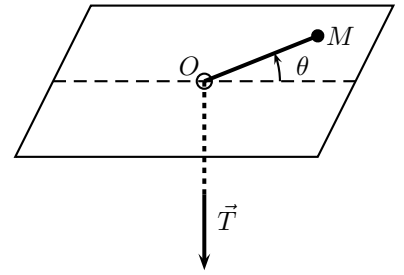
Donnée : moment d'inertie de la poulie autour de son axe : $J_\Delta = \frac{1}{2} m_p R^2$.

1. Quelle est la relation entre la vitesse linéaire v du point M et la vitesse angulaire ω de la poulie?
2. On lâche la masse sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur. Donner les équations du mouvement pour la masse et pour la poulie séparément. On introduire la tension T de la corde qui a une valeur uniforme tout le long de la corde.
3. Déduire des deux questions précédentes l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse m et la tension T de la corde.



Exercice 5. Fronde de rayon variable (★★)

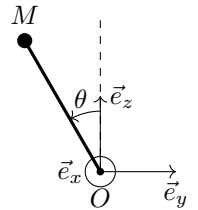
Un point matériel M de masse m , attaché à une ficelle, peut glisser sans frottement sur un support. La ficelle passe par un trou du support et est tirée vers le bas par un opérateur à une vitesse constante v_0 . La masse m est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 et la longueur du fil sur le plan est initialement ℓ_0 .



1. En utilisant le théorème du moment cinétique en O , déterminer l'expression de la vitesse angulaire en fonction du temps.
2. Donner l'expression de la tension en fonction de la distance $r = OM$. Commenter.
3. Calculer la puissance fournie par l'opérateur exerçant la tension.
4. Retrouver ce résultat directement par une méthode énergétique.

Exercice 6. Pendule inversé (★★★)

Un pendule est constitué d'une masse m quasi ponctuelle à l'extrémité M d'une tige de longueur L et de masse négligeable. L'autre extrémité O est liée avec une liaison pivot parfaite à un axe horizontal (Ox). La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la verticale ascendante (Oz) et la tige. Le pendule est également soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce, par rapport à l'axe (Ox), un couple de rappel $\Gamma = -K\theta$ où K est une constante positive.



1. Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$ du pendule, en prenant comme référence la position $\theta = 0$.
2. En déduire une équation permettant de connaître la ou les positions d'équilibre du système. Discuter graphiquement le nombre de ces positions d'équilibre en fonction des valeurs des paramètres.
3. Établir la condition pour que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable. Cette condition sera supposée réalisée dans toute la suite.
4. Exprimer l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}_m$ du pendule. En déduire une équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ .
5. En considérant que θ reste petit, établir l'expression de la période T des petites oscillations du pendule autour de la position $\theta = 0$.

Exercice 7. Chute d'un crayon (★★★)

On lâche un crayon à papier tenu sur une table dans une position faisant un angle θ_0 par rapport à la verticale. Il se met à basculer en tournant autour de sa pointe supposée immobile. On assimile ce crayon à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On néglige tout frottement.

On repère la position du crayon par l'angle θ qu'il fait avec la verticale.

Donnée : moment d'inertie du crayon par rapport à son axe de rotation : $J = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Exprimer $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de θ lors du mouvement de rotation.
2. En exploitant la notation différentielle $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, exprimer la durée de la chute du crayon sous forme d'une intégrale.
3. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer la composante verticale de la réaction de la table en fonction de θ .
4. Le crayon décolle-t-il avant de finir sa chute en rotation autour de sa pointe ?

Réponses

Exercice 1 : Rotation autour d'un axe fixe à $\omega_L = 2,66 \times 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 2 : 2. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m}}$.

Exercice 3 : 1. $J_\Delta = mR^2$; 2. $\mathcal{M}_\Delta = -2FR$; 3. $mR\dot{\omega} = -2F$; 4. $\Delta\theta = \frac{mR\omega_0^2}{4F}$; 5. $F_{\min} = 6,1 \text{ N}$.

Exercice 4 : 3. $\dot{v} = 8,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $\dot{\omega} = 89 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$; $T = 4,6 \text{ N}$.

Exercice 5 : 1. $\dot{\theta} = \frac{\omega_0 \ell_0^2}{(\ell_0 - v_0 t)^2}$; 2. $T = m\omega_0^2 \frac{\ell_0^4}{r^3}$; 3. $\mathcal{P}(\vec{T}) = \frac{m\omega_0^2 \ell_0^4 v_0}{(\ell_0 - v_0 t)^3}$.

Exercice 6 : 1. $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}K\theta^2 + mgL \cos \theta$; 2. $\sin(\theta) = \frac{K}{mgL}\theta$; 3. $K > mgL$; 5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{K - mgL}}$.

Exercice 7 : 2. $\Delta t = \sqrt{\frac{L}{3g}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$; 3. $R_y = \frac{mg}{4}(9\cos^2(\theta) - 6\cos(\theta_0)\cos(\theta) + 1)$.