

Fiche 61 : Matrices.

Dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la base canonique can , on considère pour $a \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme E_a :

$$E_a = \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \rightarrow P(X+a) \end{cases}$$

Déterminer $\text{Mat}_{can}(E_a)$ et $\text{Mat}_{can}(E_a)^{-1}$.

Exercice 1

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, on définit :

$$\exp A = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $(A+B)$ est aussi nilpotente.
et que dans ce cas $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.
2. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que Tr est une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la dimension de l'espace $E = \ker(\text{Tr}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner une base de E formée de matrices de la forme $AB - BA$.
2. Soit $f \in M_n(\mathbb{R})^*$ telle que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2 : f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \text{tr}$.

Exercice 3

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$.
2. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{1 - x^2}$.
3. $\int_2^3 \frac{4x^2}{x^4 - 1} dx$.