

[Complément] Calcul de moment d'inertie

Rappel : les expressions pour les moments d'inertie doivent vous être fournies.

La méthode générale pour calculer le moment d'un solide $\mathcal{S}$ par rapport à un axe Δ donné est la suivante.

1. On décompose le système en éléments infinitésimaux (volume, surface ou ligne selon la forme du solide).
2. Pour chaque élément :
 - on exprime la masse dm en fonction de la taille infinitésimale de l'élément,
 - et on exprime la distance r entre son centre et l'axe Δ ;
 - la contribution de l'élément au moment d'inertie est alors $dJ_{\Delta} = dm r^2$.
3. On somme les moments d'inertie d'inertie élémentaires sous forme d'une intégrale pour obtenir le moment d'inertie total :

$$J_{\Delta}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} r^2 dm$$

Exemple d'application : calcul du moment d'inertie d'un cercle homogène par rapport à un diamètre.

Soit un cercle de rayon R et de masse m . Soit (Ox) le diamètre considéré. On paramètre un point du cercle par l'angle θ relativement à l'axe (Ox) . La distance d'un point matériel à l'axe est alors $r(\theta) = R \sin(\theta)$.

Pour effectuer la somme sur les points matériels, on décompose le cercle en arcs infinitésimaux compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$. Par proportionnalité (puisque le cercle est homogène), la masse d'un arc infinitésimal est $dm = (d\theta/2\pi)m$. La contribution de cet élément au moment d'inertie vaut $dJ = dm r(\theta)^2 = mR^2 \sin^2(\theta) d\theta/(2\pi)$ (si $d\theta \ll 1$ tous les points de l'arc infinitésimal sont à la distance $r(\theta)$, à l'ordre 0 en $d\theta$).

La moment d'inertie total est la somme des moments d'inertie de chacun des arcs infinitésimaux, ce qui ici s'écrit sous forme d'une intégrale :

$$\begin{aligned} J_{(Ox)} &= \int dJ = \int_0^{2\pi} mR^2 \sin^2(\theta) d\theta/(2\pi) \\ &= mR^2 \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = mR^2 \langle \sin^2(\theta) \rangle = (1/2)mR^2 \end{aligned}$$

