# Fiche 62 : Intégration.

**Exercice 1**

Déterminer les fonctions continues $f$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup\limits_{[a,b]}|f|$.

**Exercice 2**

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que $g$ se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si $f$ est périodique, $g$ admet une limite en $+\infty$.

**Exercice 3**

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

1. Déterminer le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que $I_n \to 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $1 - I_n$, faire une intégration par parties et en déduire que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 4**

1. (a) Montrer que, pour tout $i \geq 2$,

$$\int_{i-1}^{i} \ln(t)\,dt \leq \ln(i) \leq \int_i^{i+1} \ln(t)\,dt.$$

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_1^n \ln(t)\,dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln(t)\,dt + \ln(n).$$

2. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt$.
3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n\ln(n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5 : Intégrales de Wallis**

On pose, si $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt$$

1. Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et converge vers un réel $l$.
3. Établir une relation de récurrence entre $u_n$ et $u_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
4. En déduire une expression de $u_{2n}$ et $u_{2n+1}$ à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et de $\pi$.
5. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{2n}.u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

6. En déduire la valeur de $l$.
7. Montrer que $u_{2n} \sim u_{2n+1}$ puis le fait que :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$