Fiche 63 : TD Intégration.

Exercice 1

Calculer les intégrales de fractions rationnelles suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4}$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{2-x^2}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4-1}\,dx$.

Exercice 2

On pose :

$$I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

Effectuer le changement de variables $u = \sqrt{e^x - 1}$ et calculer I.

Exercice 3

Déterminer la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+1}$$

en effectuant le changement de variable : $u = \sqrt{x+1}+1$ qu'on justifiera proprement.

Exercice 4

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

1. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$ et faire son étude.
2. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ et en déduire qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de préciser cette limite).
3. Déterminer le développement de f en 0 à tous les ordres.
4. Représenter sommairement f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt.$$

Donner un développement de la suite I_n de précision $1/n$.

Exercice 6

Soient $a < b$ réels, $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ et

$$I_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$$

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n \to 0$ pour $n \to \infty$.