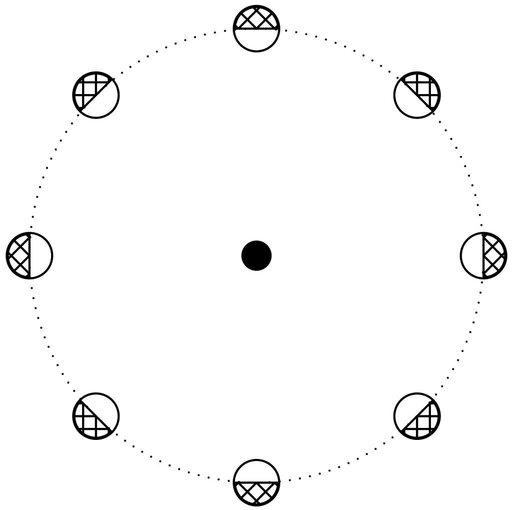
Exercice 1. Mouvement de la Lune

1. La face cachée de la Lune est hachurée, mais elle n'est pas sombre car éclairée par le Soleil.



2. Si la Lune nous montre toujours la même face, c'est qu'elle est solidaire de son axe de rotation autour de la Terre : il s'agit donc d'un **mouvement de rotation autour de l'axe (Tz)**, fixe dans le référentiel géocentrique. Sa vitesse anglaire de rotation est $\boxed{\omega_L = \dfrac{2\pi}{T_L} = 2{,}66 \times 10^{-6}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$.
3. Dans le référentiel sélénocentrique, elle a un **mouvement de rotation autour de (Lz)**, avec la même période donc avec la **même vitesse angulaire** que dans le référentiel géocentrique.

Exercice 2. Oscillations d'un pendule lié à un ressort

1. Notons $\vec{e}_z$ la direction de l'axe de rotation du pendule (perpendiculaire au plan de la figure, pointant vers nous) et $\vec{e}_x$ la direction de l'axe horizontal vers la droite. Alors $\vec{e}_y$ est la direction verticale ascendante.

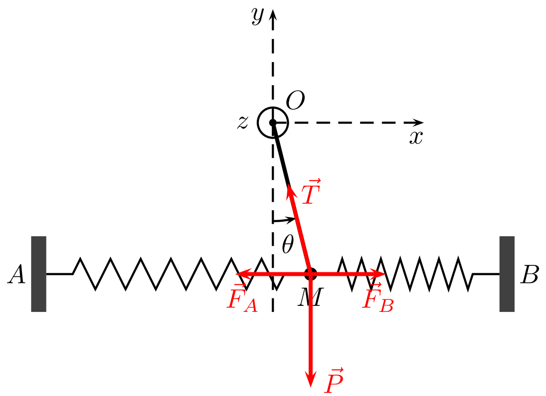
   La position de M est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM} = L\sin(\theta)\,\vec{e}_x - L\cos(\theta)\,\vec{e}_y$.

   La tension $\vec{T}$ du fil a une droite d'action passant par O donc son moment est nul.

   Le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$ a pour moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mgL\sin(\theta)\,\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$ soit $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mgL\sin(\theta)\,\vec{e}_z}$.

   Le ressort de gauche exerce une force de rappel $\vec{F}_A = -k(AM - \ell_0)\vec{e}_x = -kL\sin(\theta)\,\vec{e}_x$ qui a pour moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_A) = kL^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x$ soit $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_A) = -kL^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{e}_z}$.

   Le ressort de droite exerce une force de rappel $\vec{F}_B = k(BM - \ell_0)\vec{e}_x = -kL\sin(\theta)\,\vec{e}_x$ qui a pour moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_B) = kL^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x$ soit $\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_B) = -kL^2\cos(\theta)\sin(\theta)\,\vec{e}_z}$.



2. La vitesse du point M est $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = L\cos(\theta)\dot{\theta}\vec{e}_x + L\sin(\theta)\dot{\theta}\vec{e}_y$. Le moment cinétique du point M par rapport à O vaut $\mathcal{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = L\sin(\theta) \times mL\sin(\theta)\dot{\theta}\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y - L\cos(\theta) \times mL\cos(\theta)\dot{\theta}\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = mL^2\dot{\theta}\vec{e}_z$.

   D'après le TMC en O, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_A) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_B)$, soit en projetant sur $\vec{e}_z$: $mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin(\theta) - 2kL^2\cos(\theta)\sin(\theta)$.

   En simplifiant : $\boxed{\ddot{\theta} + \sin(\theta)\left(\dfrac{g}{L} + 2\dfrac{k}{m}\cos(\theta)\right) = 0}$.

   Pour de petites oscillations, $\cos(\theta) \approx 1$ et $\sin(\theta) \approx \theta$ donc l'équation différentielle devient $\ddot{\theta} + \theta\left(\dfrac{g}{L} + 2\dfrac{k}{m}\right) = 0$.

   On reconnait un oscillateur harmonique de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{L} + 2\dfrac{k}{m}}}$.

Exercice 3. Freinage d'une roue de vélo

1. Le modèle le plus proche est celui du cercle donc $\boxed{J_\Delta = mR^2}$.
2. Les forces de freinage ont un bras de levier $d \approx R$, de plus elles ont un effet de rotation dans le sens horaire. Leur moment par rapport à l'axe Δ vaut donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta = -2FR}$.
3. Les forces exercées sont :
   — le poids, de moment nul par rapport à Δ car sa droite d'action passe par G qui est sur Δ ;
   — les forces de contact au niveau de la liaison pivot avec l'axe, de moment nul car on ngliege les frottements (liaison parfaite) ;
   — la force de freinage, de moment $\mathcal{M}_\Delta = -2FR$.

   On applique la loi scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe Δ : $J_\Delta \dot{\omega} = \mathcal{M}_\Delta$ d'où $\boxed{mR\dot{\omega} = -2F}$.
4. $\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \dfrac{2F}{mR}t}$. La roue s'arrête pour $\omega(t_f) = 0)$ donc à l'instant $\boxed{t_f = \dfrac{mR\omega_0}{2F}}$.

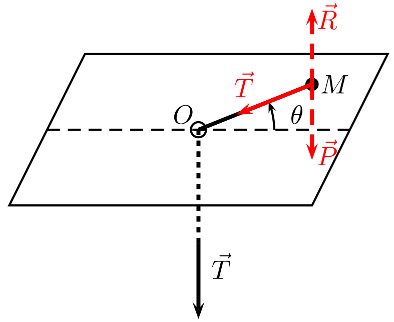
   L'évolution de l'angle est obtenue en intégrant la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$:
   $$\Delta\theta = \int_0^{t_f} \dot{\theta}\mathrm{d}t = \int_0^{t_f} \left(\omega_0 - \frac{2F}{mR}t\right) \mathrm{d}t = \omega_0 t_f - \frac{F}{mR}t_f^2 \text{ soit } \boxed{\Delta\theta = \frac{mR\omega_0^2}{4F}}.$$
5. $F = \dfrac{mR\omega_0^2}{4\Delta\theta}$ donc la force minimale pour une variation d'angle maximale $\Delta\theta_{max} = 2\pi$ vaut $\boxed{F_{\min} = \dfrac{mR\omega_0^2}{8\pi} = 6{,}1\,\mathrm{N}}$.

Exercice 4. Poulie massive

1. Quand la poulie tourne d'un angle θ, la longueur de fil qui quitte la poulie a pour longueur $R\theta$ donc le point matériel descend de $z = R\theta$. On en déduit la relation entre les vitesses $\boxed{v = \dot{z} = R\dot{\theta} = R\omega}$.
2. Les forces exercées sur la masse suspendue sont son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_x$ et la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_x$. Le PFD : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$, projeté sur $\vec{e}_x$, donne l'équation : $\boxed{m\dot{v} = mg - T}$.

   Les forces exercées sur la poulie sont les actions de contact de la liaison pivot, de moment nul sur son axe, et la force de tension du fil $\vec{T}' = -\vec{T}$, de moment $\mathcal{M}_\Delta = TR$. Le TMC par rapport à l'axe Δ : $\boxed{J_\Delta\dot{\omega} = TR}$.
3. On en extrait $T = \dfrac{J_\Delta\dot{\omega}}{R} = m_pR\dot{\omega}/2$, que l'on substitue dans l'équation du mouvement de la masse : $m\dot{v} = mg - m_pR\dot{\omega}/2 = mg - m_p\dot{v}/2$. On en déduit :
   — l'accélération linéaire $\boxed{\dot{v} = \dfrac{g}{1 + \dfrac{m_p}{2m}} = 8{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$;
   — l'accélération angulaire $\boxed{\dot{\omega} = \dfrac{\dot{v}}{R} = \dfrac{\dfrac{g}{R}}{1 + \dfrac{m_p}{2m}} = 89\,\mathrm{rad\cdot s^{-2}}}$;
   — la tension du fil $\boxed{T = m_pR\dot{\omega}/2 = \dfrac{m_pg}{2 + \dfrac{m_p}{m}} = 4{,}6\,\mathrm{N}}$.

Exercice 5. Fronde de rayon variable

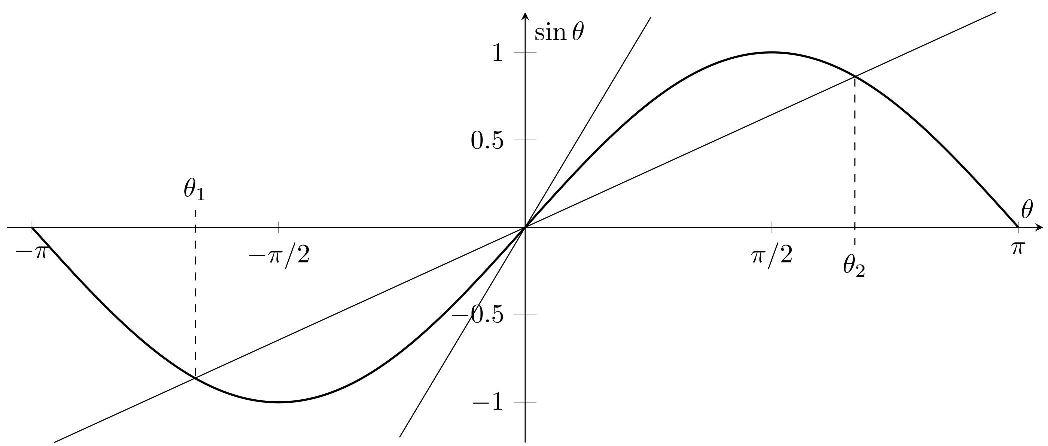


1. La longueur de la ficelle diminue à la vitesse v_0, on a donc $r = OM = \ell_0 - v_0t$.
   En coordonnées cylindriques, le moment cinétique du point M par rapport à O a pour expression $\vec{L}_O(M) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$.
   Les moments des forces exercées s'annulent car le poids et la réaction normale du support se compensent et la ligne d'action de la tension du fil passe par O.
   Donc le moment cinétique se conserve d'après le TMC.
   Puisqu'initialement il vaut $\vec{L}_O(M_0) = m\ell_0^2\omega_0\,\vec{e}_z$ il vient $\dot{\theta} = \dfrac{\omega_0\ell_0^2}{r^2}$ donc $\boxed{\dot{\theta} = \dfrac{\omega_0\ell_0^2}{(\ell_0 - v_0t)^2}}$.
2. En appliquant le PFD au point matériel, on obtient en projetant sur $\vec{e}_r$: $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T$.
   En remplaçant r et $\dot{\theta}$ par leur expression en fonction du temps on obtient $T = \dfrac{m\omega_0^2\ell_0^4}{(\ell_0 - v_0t)^3}$ donc $\boxed{T = m\omega_0^2\dfrac{\ell_0^4}{r^3}}$.
   On remarque que cette force devient infinie lorsque $r \to 0$: il est donc impossible de réaliser cette expérience en maintenant une vitesse constante jusqu'au bout.

3. La puissance fournie par l'opérateur est $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T}\cdot\vec{v}_0 = m\omega_0^2\dfrac{\ell_0^4}{r^3}v_0$ soit $\boxed{\mathcal{P}(\vec{T}) = \dfrac{m\omega_0^2\ell_0^4 v_0}{(\ell_0 - v_0 t)^3}}$.
4. D'après le théorème de la puissance cinétique, cette puissance est aussi égale à la puissance cinétique.
   $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = v_0\,\vec{e}_r + \dfrac{\omega_0\ell_0^2}{\ell_0 - v_0 t}\,\vec{e}_\theta$ donc l'énergie cinétique est $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\dfrac{\ell_0^4}{(\ell_0 - v_0 t)^2}$.
   La puissance cinétique vaut $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = m\omega_0^2 v_0\dfrac{\ell_0^4}{(\ell_0 - v_0 t)^3}}$. On retrouve ainsi le résultat précédent sans avoir à calculer la tension.

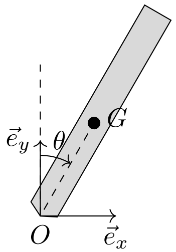
Exercice 6. Pendule inversé

1. L'énergie potentielle élastique est $\mathcal{E}_{pe} = \dfrac{1}{2}K\theta^2$ (voir exercice D). L'altitude de M est $z_M = L\cos\theta$ donc l'énergie potentielle de pesanteur est $\mathcal{E}_{pp} = mgL\cos\theta + \text{cste}$.
   Ainsi l'énergie potentielle totale est $\boxed{\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}K\theta^2 + mgL\cos\theta}$.
2. Une position d'équilibre est telle que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta} = 0$ soit $K\theta - mgL\sin(\theta) = 0$ soit $\boxed{\sin(\theta) = \dfrac{K}{mgL}\theta}$.
   $\theta = 0$ est solution de façon évidente. Il existe d'autres solutions si la pente en 0 de $\dfrac{K}{mgL}\theta$ est inférieure à celle de $\sin(\theta)$, c'est-à-dire si $K < mgL$. On a dans ce cas deux positions d'équilibre θ_1 et θ_2 supplémentaires correspondant à des angles opposés.



3. On évalue la dérivée seconde : $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} = K - mgL\cos(\theta)$. En $\theta = 0$ elle vaut $K - mgL$. Cette position d'équilibre est stable si la dérivée seconde est positive donc si $\boxed{K > mgL}$. Ainsi $\theta = 0$ est stable si c'est la seule position d'équilibre.
4. L'énergie cinétique du pendule est $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ avec $J = mL^2$, l'énergie mécanique vaut donc $\boxed{\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{1}{2}K\theta^2 + mgL\cos\theta}$.
   Elle se conserve car on néglige tout frottement. On dérive par rapport au temps afin d'obtenir une équation différentielle du mouvement : $\boxed{mL^2\ddot{\theta} + K\theta - mgL\sin\theta = 0}$.
5. Si θ reste petit, $\sin\theta \approx \theta$ donc l'équation différentielle se met sous la forme : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{(K - mgL)}{mL^2}\theta = 0}$.
   C'est un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K - mgL}{mL^2}}$ donc de période propre $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{mL^2}{K - mga}}}$.

Exercice 7. Chute d'un crayon



1. L'énergie cinétique a pour expression $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$. Le centre d'inertie est situé au milieu du crayon, donc à la distance $L/2$ du point de contact avec le sol. Ainsi l'énergie potentielle a pour expression $\mathcal{E}_p = mg\dfrac{L}{2}\cos\theta$.

   Par conservation de l'énergie mécanique, on peut écrire : $\dfrac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 + mg\dfrac{L}{2}\cos(\theta) = mg\dfrac{L}{2}\cos(\theta_0)$ donc $\boxed{\dot{\theta}^2 = \dfrac{3g}{L}(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}$.

   En dérivant par rapport au temps, il vient $\boxed{\ddot{\theta} = \dfrac{3g}{2L}\sin\theta}$.

2. On isole $\mathrm{d}t$ dans $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$: $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\dot{\theta}} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\dfrac{3g}{L}(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))}}$, puis on intègre de θ_0 à $\pi/2$ pour obtenir la durée de la chute :

$$\boxed{\Delta t = \int \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}}$$

3. D'aprés le PFD, on a $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}_G$.
   On se place dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ du schéma. Les forces s'écrivent $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$ et $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y$.

   G a un mouvement circulaire de rayon $L/2$ donc $\overrightarrow{OG} = \dfrac{L}{2}\left(\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y\right)$.

   Ainsi $\vec{v}_G = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{2}\dot{\theta}\left(\cos(\theta)\,\vec{e}_x - \sin(\theta)\,\vec{e}_y\right)$ puis :

$$\begin{aligned}
\vec{a}_G = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_G}{\mathrm{d}t} &= -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\left(\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \cos(\theta)\,\vec{e}_y\right) + \frac{L}{2}\ddot{\theta}\left(\cos(\theta)\,\vec{e}_x - \sin(\theta)\,\vec{e}_y\right)\\
&= \frac{L}{2}\left(-\dot{\theta}^2\sin(\theta) + \ddot{\theta}\cos(\theta)\right)\vec{e}_x + \frac{L}{2}\left(-\dot{\theta}^2\cos(\theta) - \ddot{\theta}\sin(\theta)\right)\vec{e}_y\\
&= \frac{3g}{4}\left(-2(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta)\right)\vec{e}_x\\
&\quad + \frac{3g}{4}\left(-2(\cos(\theta_0) - \cos(\theta))\cos(\theta) - \sin^2(\theta)\right)\vec{e}_y\\
&= \frac{3g}{4}\left(3\cos(\theta) - 2\cos(\theta_0)\right)\sin(\theta)\,\vec{e}_x + \frac{3g}{4}\left(3\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta_0)\cos(\theta) - 1\right)\vec{e}_y
\end{aligned}$$

   En projetant le PFD sur la direction vertical $\vec{e}_y$, il vient :

$$\boxed{R_y = mg + ma_{Gy} = \frac{mg}{4}(9\cos^2(\theta) - 6\cos(\theta_0)\cos(\theta) + 1)}$$

4. Le crayon décolle si la réaction normale à la table s'annule. On cherche à résoudre l'équation $R_y = 0$ ce qui revient à trouver les racines de :

$$9\cos^2(\theta) - 6\cos(\theta_0)\cos(\theta) + 1 = 0$$

   Le discriminant vaut $\Delta = 36\cos^2(\theta_0) - 36 < 0$ donc les racines sont complexes : il n'existe aucun angle pour lequel $R_y = 0$: le crayon **ne décolle pas** lors de sa chute.