Chapitre P18

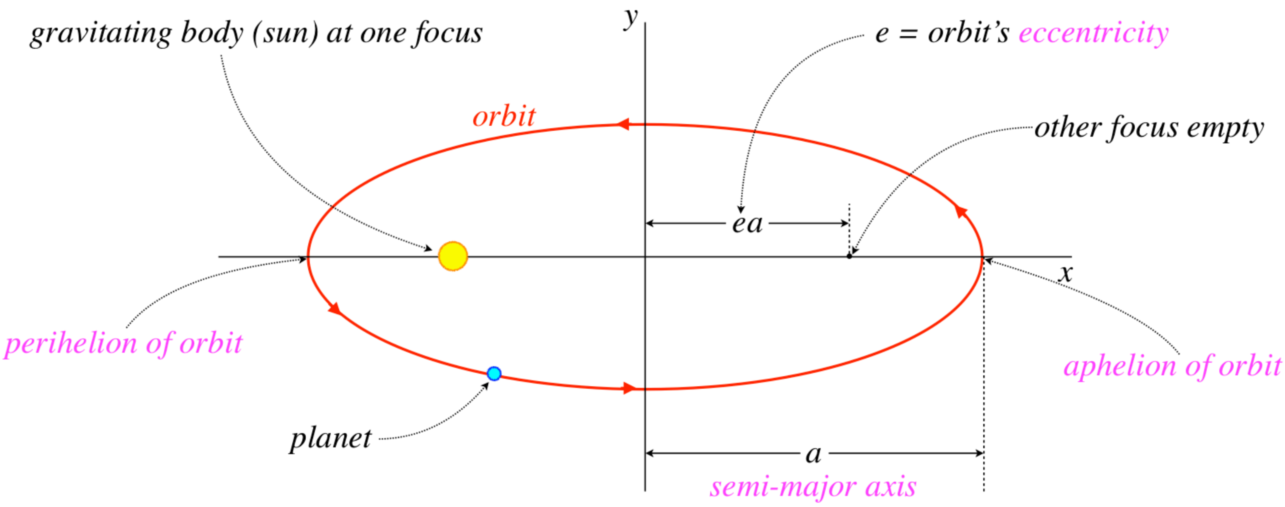
Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

Notions et contenus	Capacités exigibles
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.
Conservation de l'énergie mécanique dans un champ de force centrale conservatif. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique. *Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.*
Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.
Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.

Questions de cours

- Établir la conservation du moment cinétique pour un mouvement dans un champ de force centrale ; en déduire que ce mouvement est plan.
- Relier la vitesse aréolaire au moment cinétique ; en déduire la loi des aires pour un mouvement dans un champ de force centrale.
- Définir l'énergie potentielle effective pour le mouvement radial dans un champ de force centrale conservative ; représenter un graphe typique et définir état lié et état de diffusion.
- Énoncer les lois de Kepler en les illustrant ; indiquer la conséquence de la loi des aires sur l'évolution de la vitesse.
- Dans le cas du mouvement circulaire d'une planète autour du Soleil, établir qu'il est uniforme et en déduire les expressions de l'énergie mécanique et de la constante de la troisième loi de Kepler. Donner leur généralisation au cas elliptique.

Document 1. Première loi de Kepler



Une ellipse possède 2 **foyers** F_1 et F_2 : l'ellipse est lieu des points M tels que $F_1M + F_2M = 2a$ où a est le **demi-grand axe** de l'ellipse.

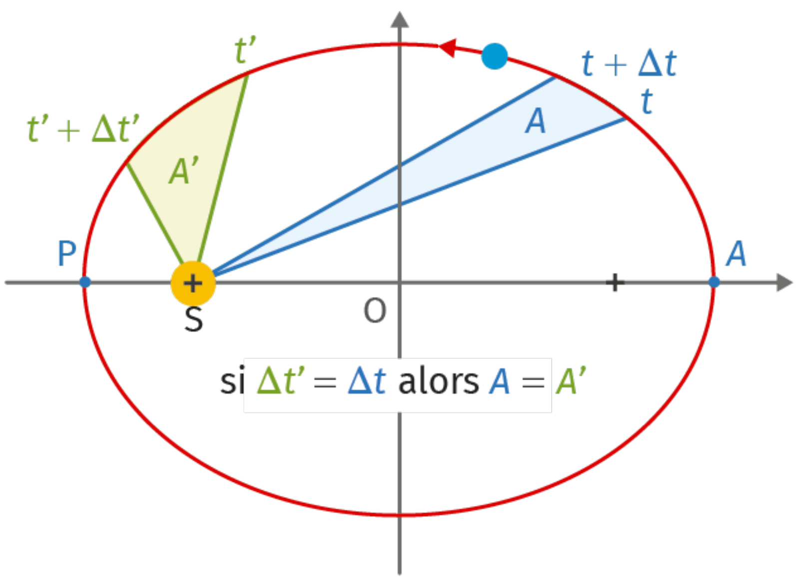
On nomme **excentricité** de l'ellipse le rapport $e = \dfrac{OF}{a}$ où OF désigne la distance entre le centre de l'ellipse et l'un des foyers :

— si $e = 0$, les foyers sont confondus avec le centre et on obtient un cercle de rayon $r_0 = a$.

— plus e augmente (avec $e < 1$), plus l'ellipse est aplatie.

On nomme **périhélie** le point le plus proche du Soleil sur l'orbite d'une planète autour du Soleil, et **aphélie** le point le plus éloigné. Ce sont les points opposés sur le grand axe de l'ellipse.

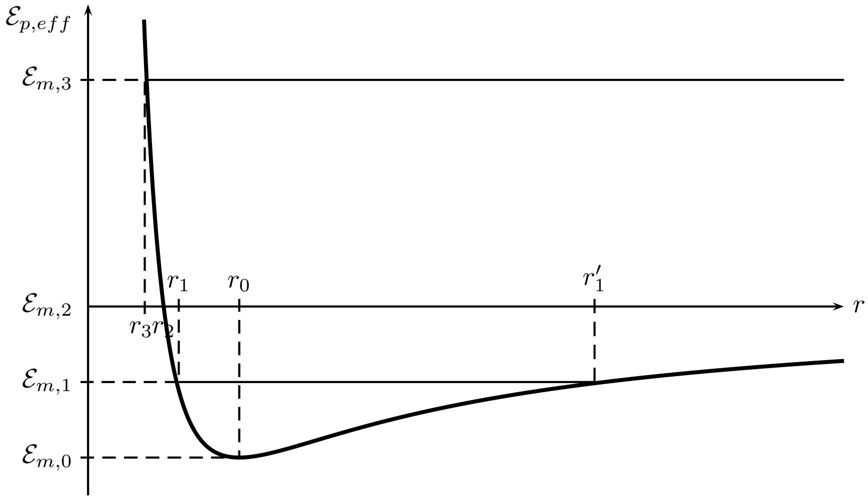
Document 2. Deuxième loi de Kepler



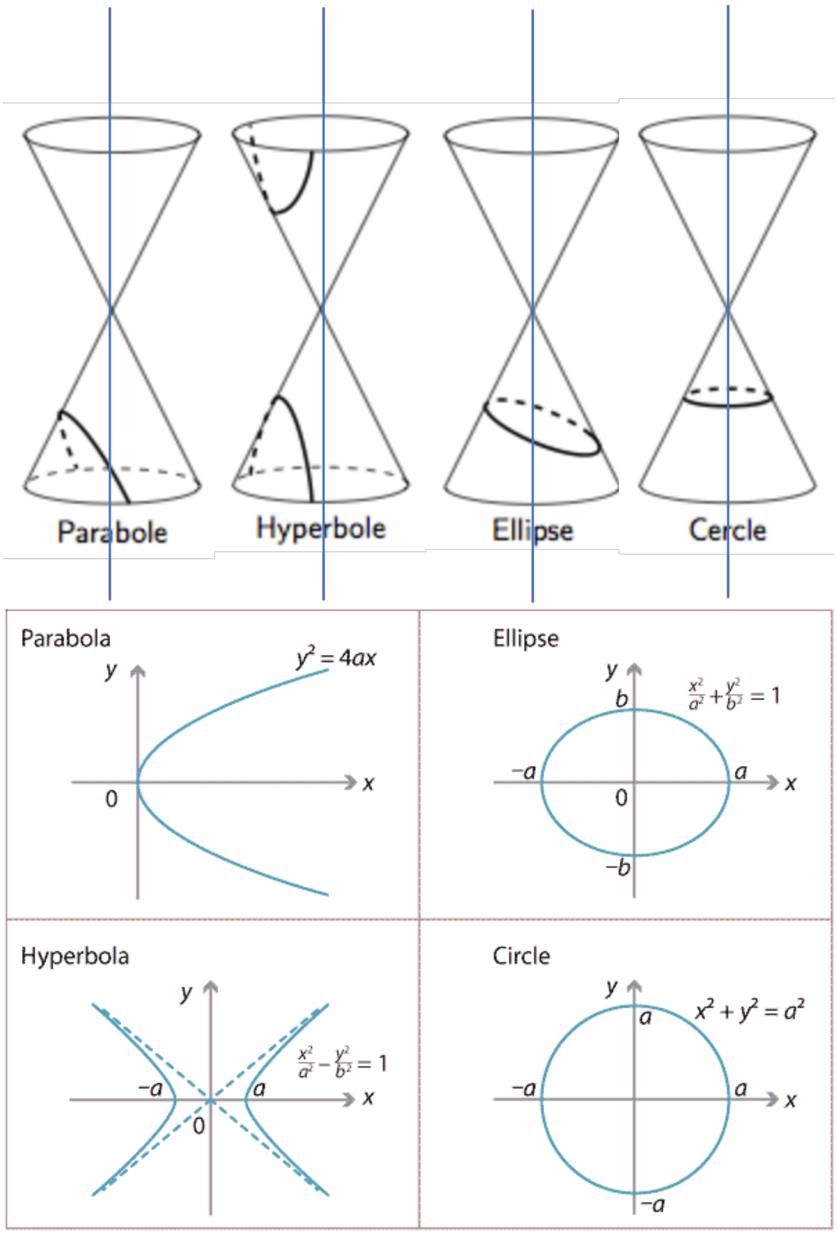
Document 3. Caractéristiques orbitales des planètes

Planète	Demi-grand axe (ua)	Excentricité	Période (an)
Mercure	0,3871	0,2056	0,2408
Vénus	0,7233	0,0068	0,6152
Terre	1,000	0,0167	1,000
Mars	1,524	0,0934	1,881
Jupiter	5,203	0,0484	11,86
Saturne	9,537	0,0054	29,46
Uranus	19,19	0,0427	84,02
Neptune	30,07	0,0086	164,8

Document 4. Énergie potentielle effective pour un champ newtonien



Document 5. Coniques



Données pour tous les exercices :
- constante de gravitation $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
- masse du Soleil $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
- masse de la Terre $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- rayon de la Terre $R_T = 6{,}38 \times 10^{6}\,\mathrm{m}$
- période de rotation de la Terre sur elle-même $T = 86\,164\,\mathrm{s}$
- unité astronomique (demi-grand axe de l'orbite de la Terre) : $1\,\mathrm{ua} = 1{,}50 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$

Exercice de cours A. Système masse-ressort plan

Soit un point matériel M pouvant se mouvoir sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché à un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité O est fixe dans le référentiel.

Initialement, le ressort a pour longueur sa longueur à vide, et on communique au point matériel une vitesse $\vec{v}_0$ perpendiculaire à l'axe du ressort.

1. Donner l'expression du moment cinétique de M par rapport à O et de son énergie mécanique à l'instant initial.
2. Justifier que ce moment cinétique se conserve, ainsi que son énergie mécanique.
3. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective pour le mouvement radial du point matériel. Tracer qualitativement son graphe en fonction de r.
4. Le mouvement radial du point est-il borné ?

Exercice de cours B. Mouvement circulaire en champ newtonien

Soit un point matériel M de masse m en orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre de masse M. On se place dans le référentiel lié au centre de cet astre.

1. Montrer que ce mouvement est uniforme. La loi des aires est-elle vérifiée ?
2. Déterminer l'expression de la vitesse du point matériel.
3. Définir la période T de révolution et déterminer l'expression de $\dfrac{T^2}{r_0^3}$. Commenter.
4. Établir une relation simple entre l'énergie cinétique du point matériel et son énergie potentielle.
5. En déduire l'expression de son énergie mécanique en fonction de r_0.

Exercice de cours C. Satellite géostationnaire

1. Montrer que la trajectoire d'un satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique est forcément circulaire et dans le plan de l'équateur.
2. Calculer alors le rayon de l'orbite d'un tel satellite.

Exercice de cours D. Mouvement elliptique d'une planète

On considère une planète de masse m en orbite elliptique autour du Soleil, avec une constante des aires C.

1. Quelle est la direction vecteur vitesse lorsque la planète se trouve au périhélie ou à l'aphélie ?
2. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de la constante des aires et de la distance r au Soleil en ces points.
3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique en fonction de $\mathcal{G}$, M_S, m, C et de r en ces points.
4. En déduire que ces distances sont racines d'un polynôme du deuxième degré.
5. Comment le demi-grand axe a de l'ellipse est-il relié à ces distances ? En déduire son expression en fonction de $\mathcal{G}$, M_S, m et $\mathcal{E}_m$.

Exercice de cours E. Comète de Halley

La comète de Halley a une orbite elliptique autour du Soleil. Sa période de révolution est $T = 75{,}3\,\mathrm{an}$ et sa distance minimale au Soleil (périhélie) vaut $d_{\min} = 0{,}586\,\mathrm{ua}$.

1. Déterminer le demi-grand-axe a de l'orbite de la comète. En déduire sa distance maximale au Soleil.
2. Exprimer sa vitesse en fonction de $\mathcal{G}$, M_S, a et r sa distance au Soleil.
3. Calculer sa vitesse maximale et sa vitesse minimale sur son orbite.
4. Vérifier que la constante des aires a la même valeur en ces 2 points.

Exercice 1. Vitesses cosmiques (★)

Une vitesse cosmique est une vitesse seuil qui permet d'échapper à l'influence d'un corps céleste. Nous allons les calculer dans le référentiel géocentrique.

La première vitesse cosmique représente la vitesse de satellisation minimale autour de la Terre.

1. Quelle est la trajectoire d'un point matériel juste satellisé en orbite la plus basse possible ?
2. En déduire l'expression puis la valeur de la première vitesse cosmique.

La deuxième vitesse cosmique représente la vitesse de libération, c'est-à-dire la vitesse minimale d'un corps situé à la surface de la Terre qui lui permet de s'éloigner définitivement de la Terre.

3. Quelle énergie mécanique minimale doit posséder un corps pour échapper à l'attraction gravitationnelle de la Terre ?
4. Quelle est son énergie potentielle à la surface de la Terre ?
5. En déduire l'expression puis la valeur de la seconde vitesse cosmique.

On définit également la troisième vitesse cosmique, qui est la vitesse de libération hors du système solaire depuis la Terre.

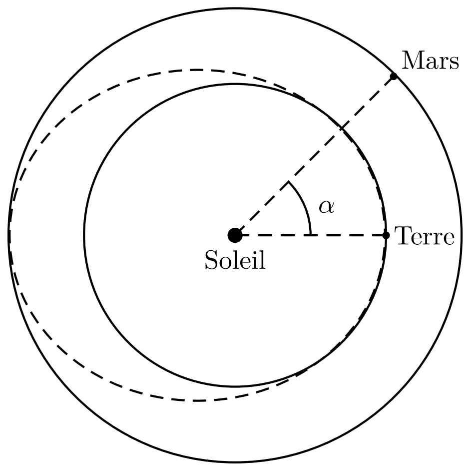
Exercice 2. Lancement d'une fusée (★★)

On souhaite envoyer envoyer des astronautes sur la station spatiale internationale (ISS) qui possède une orbite circulaire d'altitude $h = 350\,\text{km}$. On utilise pour ce faire une fusée qui décolle depuis une base à la surface de la Terre à la latitude λ. On se place dans le référentiel géocentrique.

1. Dans ce référentiel, quelle est la vitesse de la fusée avant même le lancement ?
2. En déduire son énergie mécanique massique initiale.
3. Quelle doit être son énergie mécanique massique après le lancement pour rejoindre l'orbite de l'ISS ?
4. Justifier l'intérêt de base de lancement proche de l'équateur.
5. Quel pourcentage d'énergie économise-t-on en partant de Kourou en Guyane ($\lambda = 5{,}2°\text{N}$) plutôt que de Paris ($\lambda = 48{,}9°\text{N}$) ?

Exercice 3. Orbite de Hohmann (★★)

Pour se rendre sur Mars, la manière la plus économique consiste à utiliser une orbite de transfert dite orbite de Hohmann (représentée en tirets sur le schéma ci-contre). C'est une orbite semi-elliptique tangente en son périhélie à l'orbite terrestre et tangente en son aphélie à l'orbite martienne. Cesdeux orbites sont supposées coplanaires et circulaires de rayons respectifs $r_T = 1{,}50 \times 10^{11}\,\text{m}$ et $r_M = 2{,}28 \times 10^{11}\,\text{m}$.



1. Calculer la valeur du demi-grand axe a de l'orbite de transfert.
2. Exprimer la vitesse d'une sonde sur l'orbite de transfert lorsqu'elle se trouve à une distance r du Soleil.
3. Calculer la variation de la vitesse qu'il faut lui faire subir :
   — pour le placer sur l'orbite de Hohmann depuis l'orbite terrestre ;
   — pour le faire quitter cette orbite et rejoindre celle de Mars.
4. En utilisant la troisième loi de Kepler, calculer la durée du voyage interplanétaire.
5. Déterminer la valeur de l'angle α entre la Terre et la Mars vues depuis le Soleil, au moment du début du transfert (voir schéma).
6. Avec quelle régularité cette configuration se rencontre-t-elle ?

Exercice 4. Perte d'altitude d'un satellite (★★)

Le satellite d'observation SPOT, de masse m, est en orbite circulaire autour de la terre à l'altitude initiale $h = 800\,\text{km}$ et à la vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel géocentrique.

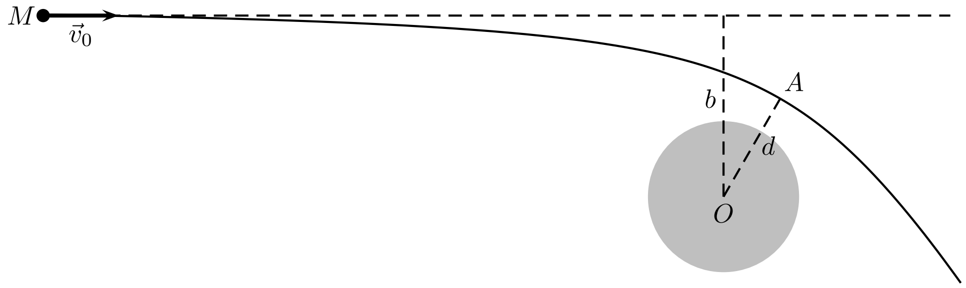
1. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'énergie mécanique du satellite dans le référentiel géocentrique.

Ce satellite est soumis de la part de l'atmosphère raréfiée à la force de frottement $\vec{F} = -\alpha m v\,\vec{v}$, où α est une constante et $v = ||\vec{v}||$. Sous l'effet de cette force, le satellite subit une diminution d'altitude de $1{,}0\,\text{m}$ par révolution.

2. Comment évolue qualitativement la vitesse ? Commenter.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$ en considérant que le mouvement reste quasi-circulaire.
4. Déterminer la valeur du coefficient α.
5. Quelle est la perte d'altitude du satellite au bout de dix ans ?

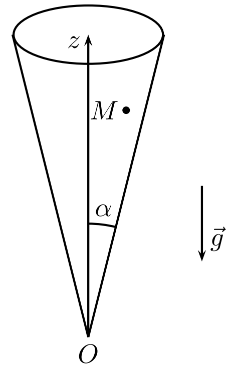
Exercice 5. Collision d'une météorite (★★)

Dans le référentiel géocentrique, une météorite M de masse m a, très loin de la Terre, une vitesse $\vec{v}_0$ de module v_0 portée par une droite située à une distance b (paramètre d'impact) du centre O de la Terre. On suppose que la météorite est soumise uniquement au champ gravitationnel terrestre et qu'il n'y a jamais de forces de frottement. Soit A le point de la trajectoire tel que la distance Terre - Météorite soit minimale. On note $OA = d$.



1. Exprimer la valeur du moment cinétique initial de la météorite par rapport à O. Justifier qu'il se conserve. En déduire que la trajectoire est plane.
2. Donner l'expression de l'énergie potentielle effective de la météorite. Tracer son allure en fonction de $r = OM$. Identifier la position du point A sur cette courbe.
3. En déduire l'expression de d en fonction de M, b, v_0.
4. Quelle condition doit satisfaire b pour que la météorite de vitesse initiale v_0 rencontre la Terre ?
5. Si elle évite la Terre, quel est son mouvement ultérieur ?

Exercice 6. Mouvement d'une bille sur un cône (★★★)



Une bille supposée ponctuelle de masse m glisse sans frottement à l'intérieur d'un cône de demi-angle α et d'axe Oz. La bille est lancée à une altitude z_0 (repérée par rapport au sommet du cône O) avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale. On utilisera les coordonnées cylindriques.

1. Montrer que l'énergie mécanique et le moment cinétique par rapport à Oz se conservent.
2. Ecrire l'énergie mécanique sous forme d'une fonction uniquement de $\dot{z}$ et z.
3. Identifier une énergie potentielle effective pour la mouvement vertical et tracer son allure.
4. Justifier que le mouvement de la bille s'effectue entre deux altitudes extrémales z_{min} et z_{max} (qu'on ne cherchera pas à exprimer).

Réponses

Exercice 1 : 2. $v_1 = 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$; 5. $v_2 = 11\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Exercice 2 : 1.$v_0 = \dfrac{2\pi R_T}{T}\cos(\lambda)$; 2. $e_{m,i} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi R_T}{T}\cos(\lambda)\right)^2 - \dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T}$; 3. $e_{m,f} = -\dfrac{\mathcal{G}M_T}{2(R_T+h)}$.

Exercice 3 : 1. $a = 1{,}89\times10^{11}\,\mathrm{m}$; 2. $v = \sqrt{\mathcal{G}M_S\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$; 3. $\Delta v_1 = 3{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$; $\Delta v_2 = 2{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$; 4. $\Delta t = T_H/2 = 0{,}71\,\mathrm{an}$; 5. $\alpha = 44°$; 6. 2,14 an.

Exercice 4 : 3. $\dot{h} = -2\alpha\sqrt{\mathcal{G}M_T(R_T+h)}$; 4. $\alpha = 1{,}54\times10^{-15}\,\mathrm{m^{-1}}$; 5. $\Delta h = -52\,\mathrm{km}$.

Exercice 5 : 1. $\vec{L}_O = mv_0b\vec{e}_z$; 3. $d = -\dfrac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\dfrac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}$.

Exercice 6 : 1. $\mathcal{E}_m = \dfrac{m}{2}\left(1+\tan^2(\alpha)\right)\dot{z}^2 + \dfrac{m(v_0z_0)^2}{2z^2} + mgz$;