[P18] Résolution exacte pour un champ newtonien

Document 1. Équation des trajectoires

La trajectoire d'une planète dans le référentiel héliocentrique est donnée en coordonnées polaires de centre le Soleil par la relation entre r et θ.

On l'obtient en utilisant le PFD et en exploitant la relation définissant la constante des aires : $r^2\dot\theta = C$. En posant $u = \dfrac{1}{r}$, la loi des aires se met sous la forme $\dot\theta = Cu^2$ ce qui permet d'exprimer la dérivée temporelle de toute fonction $f(\theta(t))$: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \dot\theta f'(\theta) = Cu^2 f'(\theta)$.

Les vecteurs caractéristiques du mouvement s'écrivent alors en fonction de $u(\theta)$ et de ses dérivées :

- $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{u}\,\vec{e}_r$
- $\vec{v} = -\dfrac{\dot u}{u^2}\,\vec{e}_r + \dfrac{1}{u}\dot\theta\,\vec{e}_\theta = -Cu'\,\vec{e}_r + Cu\,\vec{e}_\theta$
- $\vec{a} = -C\dot{(u')}\,\vec{e}_r - Cu'\dot\theta\,\vec{e}_\theta + C\dot u\,\vec{e}_\theta - Cu\dot\theta\,\vec{e}_r = -C\times u''Cu^2\,\vec{e}_r - C^2u'u^2\,\vec{e}_\theta + C^2u'u^2\,\vec{e}_\theta - C^2u^3\,\vec{e}_r = -C^2u^2(u''+u)\,\vec{e}_r$.

La force d'attraction gravitationnelle exercée sur la planète a pour expression $\vec{F} = -\mathcal{G}M_S m\,u^2\,\vec{e}_r$. Avec le PFD, on obtient une équation différentielle pour $u(\theta)$: $-\mathcal{G}M_S m\,u^2 = -mC^2u^2(u''+u)$. On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre égale à 1 :

$$u'' + u = \frac{\mathcal{G}M_S}{C^2}$$

La solution générale est $u(\theta) = \dfrac{\mathcal{G}M_S}{C^2} + A\cos(\theta+\varphi)$.

En posant $p = \dfrac{C^2}{\mathcal{G}M_S}$, $A = \dfrac{e}{p}$ et $\varphi = -\theta_0$, la solution est :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}}$$

On admettra que c'est l'équation d'une conique (intersection d'un plan et d'un cône).

Les grandeurs caractéristiques d'une conique sont son « paramètre » p et son « excentricité » e, qui définit la forme de la conique :

— si $e = 0$ c'est un cercle ;

— si $e < 1$ c'est une ellipse ;

— si $e = 1$ c'est une parabole ;

— si $e > 1$ c'est une hyperbole.

Dans le cas d'une ellipse :

— le périhélie se trouve en $\theta = \theta_0$: $r_{min} = \dfrac{p}{1+e}$,

— l'aphélie se trouve en $\theta = \theta_0 + \pi$: $r_{max} = \dfrac{p}{1-e}$;

— le demi-grand axe vérifie donc $a = \dfrac{r_{min} + r_{max}}{2} = \dfrac{p}{1-e^2}$. Le paramètre est ainsi lié au demi-grand axe : $p = a(1-e^2)$.

Document 2. Démonstration de la troisième loi de Kepler

On peut montrer (par un calcul d'intégrale, voir annexe) que l'aire d'une ellipse vaut $\mathcal{A} = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$.

Or, d'après la loi des aires la vitesse aréolaire vaut $v_A = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{2}$ donc l'aire totale balayée vaut $\mathcal{A} = v_A T = \dfrac{C}{2}T$ où T est la période.

Ainsi $T^2 = \dfrac{4\mathcal{A}^2}{C^2} = \dfrac{4\pi^2a^4(1-e^2)}{C^2}$ donc $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2a(1-e^2)}{C^2} = \dfrac{4\pi^2p}{C^2}$.

Puisque le paramètre vérifie $p = \dfrac{C^2}{\mathcal{G}M_S}$, on obtient la troisième loi de Kepler (avec l'expression de la constante) :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}}$$

Annexe : Calcul de l'aire d'une ellipse

On part de l'équation de la trajectoire obtenue ci-dessus (on pose $\theta_0 = 0$ sans perte de généralité) :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)} = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta)}$$

L'aire d'un élément de surface compris entre les angles θ et $\theta + \mathrm{d}\theta$ vaut : $\mathrm{d}A = \dfrac{1}{2} r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$.

L'aire totale vaut donc : $\mathcal{A} = \dfrac{a^2}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-e^2)^2}{(1+e\cos(\theta))^2}\mathrm{d}\theta$.

Une astuce classique consiste à poser le changement de variable $x = \tan(\theta/2)$.

Alors $\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2(\theta/2)} - 1 = \dfrac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ et $\mathrm{d}x = (1+\tan^2(\theta/2)) \times (\mathrm{d}\theta/2) = \dfrac{1+x^2}{2}\mathrm{d}\theta$.

On a alors :

$$\mathcal{A} = a^2(1-e^2)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\times\left(1 + e\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = a^2(1-e)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+e)^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)\times\left(\dfrac{(1+e)+(1-e)x^2}{1+x^2}\right)^2}$$

$$\mathcal{A} = a^2(1-e)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2)\,\mathrm{d}x}{\left(1 + \dfrac{1-e}{1+e}x^2\right)^2}$$

Posons $\alpha^2 = \dfrac{1-e}{1+e}$. Le calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{(1+\alpha x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ se fait en décomposant la fraction en éléments simples :

$$\frac{1+x^2}{(1+\alpha^2x^2)^2} = \frac{1+\alpha^2x^2 + (1-\alpha^2)x^2}{(1+\alpha^2x^2)^2} = \frac{1}{1+\alpha^2x^2} + \frac{(1-\alpha^2)x^2}{(1+\alpha^2x^2)^2}$$

On reconnait dans le premier terme la dérivée de $\dfrac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x)$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha^2x^2} = \left[\frac{1}{\alpha}\arctan(\alpha x)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha}$.

Pour le deuxième terme, on intègre par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\alpha^2)x^2}{(1+\alpha^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{(1-\alpha^2)x}{2\alpha^2}\right) \times \left(-\frac{2\alpha^2 x}{(1+\alpha^2x^2)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\left(-\frac{(1-\alpha^2)x}{2\alpha^2}\right) \times \left(\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{(1-\alpha^2)}{2\alpha^2}\right) \times \left(\frac{1}{1+\alpha^2x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{1-\alpha^2}{2\alpha^2} \times \frac{\pi}{\alpha}
\end{aligned}$$

La somme des deux termes donne ainsi : $I = \left(1 + \dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha^2}\right)\dfrac{\pi}{\alpha} = \dfrac{(\alpha^2+1)\pi}{2\alpha^3} = \pi\dfrac{(1+e)^{1/2}}{(1-e)^{3/2}}$.

Pour conclure, l'aire vaut $\mathcal{A} = a^2(1-e)^2 \times \pi\dfrac{(1+e)^{1/2}}{(1-e)^{3/2}} = \pi a^2(1+e)^{1/2}(1-e)^{1/2} = \boxed{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}$.