Chapitre 18 : Séries numériques.

Plan

1 Définitions de base

On considère : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Définition 1 *Étudier la **série** de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on note $\sum_{n\geq 0} u_n$, c'est étudier la suite dite des **sommes partielles** :*

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **diverge** ou **est divergente** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ **converge** ou **est convergente** quand la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers une limite finie).

Dans ce cas, on pose :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Le nombre $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la **somme** de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(S - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=n}^{+\infty} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des **restes** de la série. Elle tend vers 0.

Premières propriétés :

Propriété 1 *Si on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ converge.*

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geq 0}(u_{n+1} - u_n)$ sont **de même nature**.

Propriété 2 *Si la série de termes réels ou complexes $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge alors $u_n \to 0$.*

Si on a pas $u_n \to 0$ alors on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

Propriété 3 *Si les séries à termes réels ou complexes $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent et si λ et μ sont des réels ou des complexes, la série $\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

On peut du coup considérer l'espace vectoriel des séries convergentes et la forme linéaire qui à chaque série convergente associe sa somme.

Propriété 4 (Série Géométrique) *Si z est un nombre complexe, la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ (dite **série géométrique**) converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Pour tout $n \to +\infty$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

2 Séries à termes positifs

Le théorème des suites monotones permet d'étudier les séries à termes positifs de manière simplifiée.

Propriété 5 *On considère deux séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ *à termes positifs. On a :*

- *La série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.*
- *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $0 \leq v_n = O(u_n)$ *et la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge.*
- *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $0 \leq v_n = O(u_n)$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *diverge alors* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge.*
- *Si :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$, *les séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *sont de même nature.*

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ continue décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$ (du coup positive...).

Propriété 6 (Comparaison série intégrale) *Dans les conditions précédentes, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

Du coup la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ *converge si et seulement si la suite* $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

On montre ainsi :

Propriété 7 (Séries de Riemann) *Si* α *est un réel positif, la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ *dite **série de Riemann** converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

3 Écriture d'un nombre en base décimale

On peut dans ce cadre revenir sur l'écriture décimale (se généralise sans peine à l'écriture en base $b \in \{2, 3 \dots\}$) d'un réel :

Théorème 1 *Si* n *est un entier naturel, il existe une unique suite* $(b_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $[\![0, 9]\!]$, *nulle à partir d'un certain rang, tel que :*

$$n = \sum_{k\geq 0} b_k 10^k$$

On écrit du coup en base 10 : $n = b_m \dots b_1 b_0$

Théorème 2 *Si α est un réel, il existe un unique entier n et une unique suite $(a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[\![0,9]\!]$, non égale à 9 à partir d'un certain rang, tel que :*

$$\alpha = n + \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{10^k}$$

On écrit du coup en base 10, en reprenant l'écriture de n : $\alpha = b_m \dots b_1 b_0, a_1 a_2 \dots$
Dans ces conditions, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des **décimales** de α.

4 Convergence absolue

On considère une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes complexes.

Définition 2 *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite* ***absolument convergente*** *quand la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.*

Le théorème associé :

Théorème 3 *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est* ***absolument convergente*** *alors elle est convergente et dans ce cas :*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

La réciproque est fausse !

Corollaire :

Propriété 8 *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie $u_n = O(v_n)$ et la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente donc convergente.*

En liaison avec le programme d'algèbre linéaire :

Propriété 9 *Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont absolument convergentes et λ est un réel ou un complexe alors la série $\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n)$ est absolument convergente donc convergente et*

$$\sum_{n\geq 0}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n\geq 0} u_n + \lambda \sum_{n\geq 0} v_n$$

On peut du coup considérer l'espace vectoriel des séries absolument convergentes et la forme linéaire qui à chaque série absolument convergente associe sa somme.

5 Séries alternées

On considère : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **décroissante** et **tendant vers 0**, du coup positive.

On s'intéresse à la série de terme général $(b_n = (-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dite alternée.

Posons , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} b_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \text{ et } S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k$$

$$S_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... - a_{2n-1} + a_{2n}, \quad S_{2n+1} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... - a_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}$$

Théorème 4 (des séries alternées) *La série :* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ *est convergente. On a de plus, si* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$0 \leq \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = S_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Remarquons de plus que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes :

- La suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, si $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

- La suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, si $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$$

- On a

$$S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$$

Posons , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$R_{2n} = \sum_{k=2n}^{+\infty} b_k = \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ et } R_{2n+1} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

$$R_{2n} = a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - ..., \quad R_{2n+1} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} ...$$

Propriété 10 *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$-a_{2n+1} \leq R_{2n+1} \leq 0 \leq R_{2n} \leq a_{2n}$$

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n$$

6 Familles sommables de réels positifs

On considère un ensemble I fini ou infini et $(x_i)_{i\in I} \in [0,+\infty]^I$ une famille **positive**.

Définition 3 *On pose*

$$\sum_{I\in I} x_i = \sup_{J_f\subset I; J_f fini} \left(\sum_{i\in J_f} x_i\right) \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup +\infty$$

*La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** ou **à somme finie** quand $\sum_{I\in I} x_i \in \mathbb{R}_+$.*

Dans ce cas : toute sous famille est sommable et pour toute partie $J \subset I$:

$$\sum_{i\in J} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_f \subset I$ fini tel que, pour toute partie J telle que $J_f \subset J \subset I$:

$$\sum_{i\in I} x_i - \epsilon \leq \sum_{i\in J_f} x_i \leq \sum_{i\in J} x_i \leq \sum_{i\in I} x_i$$

Si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres positifs alors elle est sommable quand la série $(\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i)$ converge et les sommes de la série et de la famille coïncident.

Si $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ sont 2 familles positives sommables et $\lambda > 0$ alors :

$$\sum_{i\in I}(x_i + \lambda y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \lambda \sum_{i\in I} y_i$$

Propriété 11 (Sommation par paquets) *On considère ici que I est la réunion disjointe des ensembles (éventuellement infinis) (I_j) pour $j \in J$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille positive.*

Alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si chacune des familles $(x_i)_{i\in I_j}$ pour j dans J est sommable et que de plus $\left(\sum_{i\in I_j} x_i\right)_{j\in J}$ est une famille sommable. Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} x_i\right)$$

Propriété 12 (Théorème de Fubini) *Si I et J sont des ensembles (éventuellement infinis) et $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ pour $j \in J$ une famille positive sommable, alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{i,j}\right)$$

7 Familles sommables de complexes

On considère un ensemble I fini ou infini et $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille de nombres réels ou complexes.

Définition 4 *La famille $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est dite **sommable** quand la famille $(|z_i|)_{i\in I}$ l'est.*

Dans ce cas il existe un nombre complexe noté $\sum_{i\in I} z_i$ tel que :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \subset I$ fini tel que, pour toute partie J_f finie telle que $J_\epsilon \subset J_f \subset I$:

$$\left|\sum_{i\in I} z_i - \sum_{i\in J_f} z_i\right| \leq \epsilon$$

Dans ce cas :

$$\left|\sum_{i\in I} z_i\right| \leq \sum_{i\in I} |z_i|$$

Si $(z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors elle est sommable quand la série $(\sum_{i\in\mathbb{N}} z_i)$ est **absolument** convergente et les sommes de la série et de la famille coïncident.

Les résultats sur les familles sommables s'appliquent donc sans difficultés aux séries **absolument** convergente. Il convient par contre d'être très prudent avec les séries semi convergentes.

Propriété 13 *Si $(z_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ famille de nombres complexes vérifie, pour $i \in I$: $|z_i| \leq u_i$ et $(u_i)_{i\in I}$ est une famille positive sommable alors $(z_i)_{i\in I}$ est sommable et*

$$\left|\sum_{i\in I} z_i\right| \leq \sum_{i\in I} |z_i| \leq \sum_{i\in I} u_i$$

Si $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ sont 2 familles de complexes sommables et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors :

$$\sum_{i\in I}(x_i + \lambda y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \lambda \sum_{i\in I} y_i$$

Autrement dit, l'ensemble des familles sommables est un espace vectoriel complexe et la somme est une forme linéaire sur cet espace.

Propriété 14 (Sommation par paquets) *On considère ici que I est la réunion disjointe des ensembles (éventuellement infinis) (I_j) pour $j \in J$ et $(z_i)_{i\in I}$ une famille de complexes.*

Alors la famille $(z_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si chacune des familles $(z_i)_{i\in I_j}$ pour j dans J est sommable et que de plus $\left(\sum_{i\in I_j} |z_i|\right)_{j\in J}$ est une famille sommable. Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} z_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} z_i\right)$$

Propriété 15 (Théorème de Fubini) *Si I et J sont des ensembles (éventuellement infinis) et $(z_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ pour $j \in J$ une famille sommable, alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} z_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} z_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} z_{i,j}\right)$$

On utilise ces outils pour étudier les produits de séries de nombres complexes :

Théorème 5 (Produit de Cauchy de 2 séries de nombres complexes) *Soit $(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n)$ et $(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n)$ 2 séries absolument convergentes de nombres complexes.*

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$.
La série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n)$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k\right)$$

L'exponentielle complexe est une application importante :

Théorème 6 (Exponentielle complexe) *Si z est un complexe la série $(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!})$ est absolument convergentes et on pose*

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Si z et z' sont 2 complexes, on montre :

$$\exp(z + z') = \exp(z).\exp(z')$$

Savoirs

Définition d'une série convergente. Séries géométriques, séries de Riemann, séries à termes positifs, série absolument convergente, séries alternées, familles sommables à termes positifs et familles sommables complexes. théorèmes des séries alternées, théorème de Fubini, somme de Cauchy, propriétés de base de l'exponentielle complexe.

Savoir-faire

Identifier une série convergente, une série absolument convergente, une famille sommable de réels positifs, une famille sommables de nombres complexes.