

Fiche 65 : TD du 23-04.

Exercice 1

Soient $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = 0, x - y - z = 0 \right\}$.

1. Justifier que P est un sous espace de \mathbb{R}^3 (on admet que D est un sous espace de \mathbb{R}^3).
2. Donner une base de P et une base de D . Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
3. Soit p la projection de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D . Déterminer P_1 la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
4. Soit s la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport à P parallèlement à D . Déterminer S_1 la matrice de s dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2

Le but de cette exercice est de déterminer la limite pour $n \rightarrow +\infty$ de la suite :

$$\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t) dt \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n}(t) dt$$

1. Déterminer W_0 et W_1 .
2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t) \sin(t) \cos^{2n}(t) dt$$

3. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$:

$$(2n + 2)W_{n+1} = (2n + 1)W_n$$

4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n + 1} J_{n+1} + \frac{2}{2n + 1} \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{2n+1}(t) dt$$

5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{2n + 2}{2n + 1} \right) J_{n+1} - J_n = \frac{-2}{(2n + 1)(2n + 2)} W_{n+1}.$$

6. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{J_{n+1}}{W_{n+1}} - \frac{J_n}{W_n} = \frac{-2}{(2n + 2)^2}$$

7. Conclure que si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{J_n}{W_n} - \frac{J_0}{W_0} = \frac{-1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$$

8. Montrer que si $t \in [0, \pi/2]$:

$$\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t.$$

9. En déduire que si $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(W_n - W_{n+1})$$

puis

$$0 < J_n \leq \frac{\pi^2 W_n}{8(n+1)}$$

10. En déduire la limite de la suite : $\left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3

On considère la fonction $f(x)$ définie pour $x \in]-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dv}{\cos(v/2)}$$

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur l'intervalle proposé et calculer $f'(x)$ pour x dans cet intervalle.
2. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $] - \pi, \pi[$ et impaire.
3. Faire le changement de variable $t = \sin(v/2)$ dans l'intégrale et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
4. Donner alors le tableau de variations de f et en déduire qu'elle définit une bijection de $] - \pi, \pi[$ sur \mathbb{R} à réciproque dérivable.

On note g sa réciproque (*dont on ne cherchera pas d'expression explicite*). Rappelons que dans ces conditions, si $x \in] - \pi, \pi[$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $y = f(x)$ est équivalent à $x = g(y)$. On rappelle aussi que, toujours dans ces conditions g est dérivable en y et : $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

5. Montrer que si $y \in \mathbb{R}$: $g'(y) = 2 \cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g(0)$, $g'(0)$ et $g''(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que g vérifie, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la relation : $g''(y) + \sin(g(y)) = 0$.