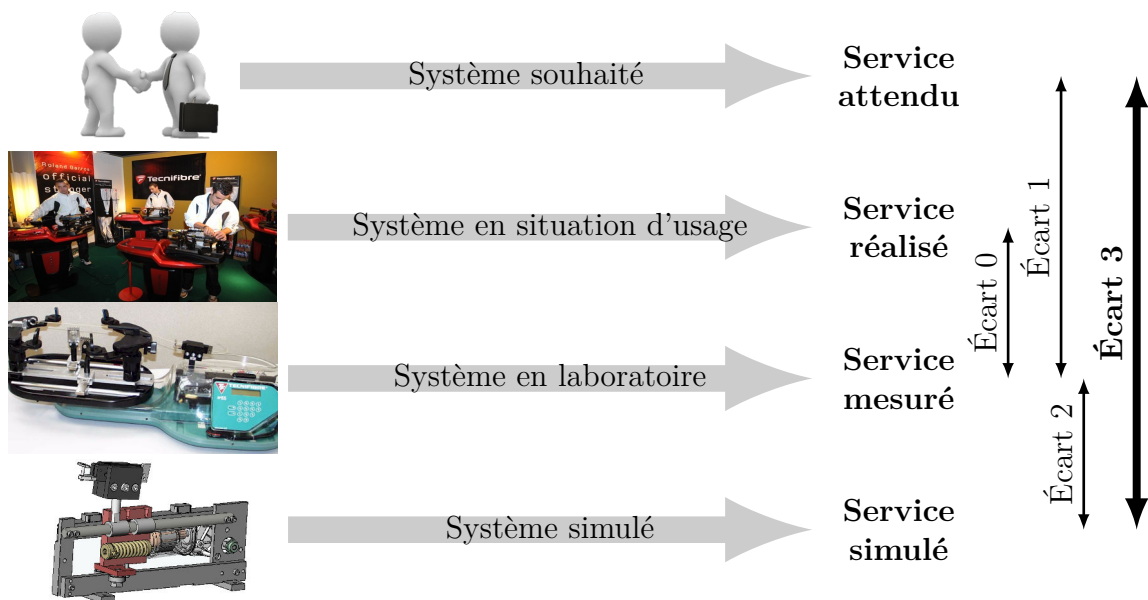


Modélisation et étude des équilibres statiques

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Système élévateur de rack	3
Exercice 2 – Boîtier de direction	6
Exercice 3 – Pèse-lettre	10
Exercice 4 – Glissière de cellule d'injection plastique	14
Exercice 7 – Excavatrice	17

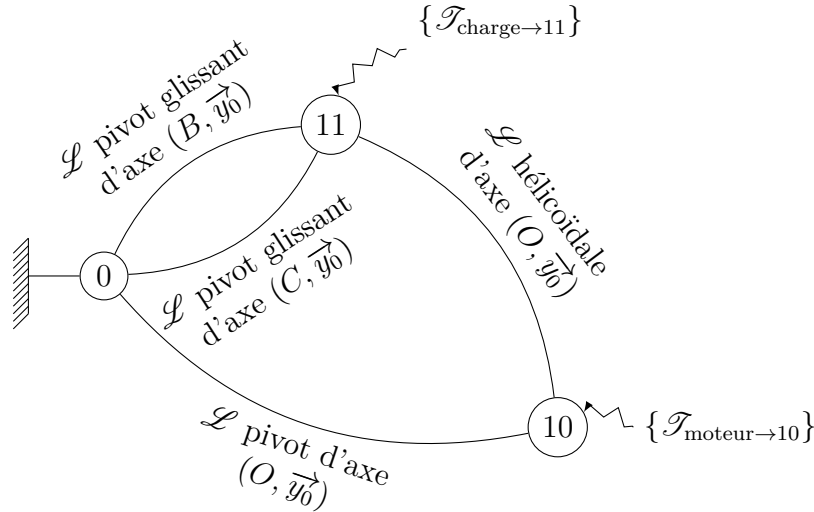


Nicolas Mesnier, lycée international Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des MPSI
<https://cahier-de-prepa.fr/mpsi-perrin>

— Version du 21 avril 2026 —

Système élévateur de rack

Question 1.1. D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



Question 1.2. Par cours, il vient les expressions canoniques des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons :

— liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_0) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} X_0 \vec{x}_0 + Y_0 \vec{y}_0 + Z_0 \vec{z}_0 \\ L_0 \vec{x}_0 + N_0 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

— liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{y}_0) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} = \underset{B}{\begin{Bmatrix} X_B \vec{x}_0 + Z_B \vec{z}_0 \\ L_B \vec{x}_0 + N_B \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

— liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{y}_0) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\} = \underset{C}{\begin{Bmatrix} X_C \vec{x}_0 + Z_C \vec{z}_0 \\ L_C \vec{x}_0 + N_C \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

— liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{y}_0) et de pas p à droite :

$$\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\} = \underset{O}{\begin{Bmatrix} X \vec{x}_0 + Y \vec{y}_0 + Z \vec{z}_0 \\ L \vec{x}_0 - \frac{p}{2\pi} Y \vec{y}_0 + N \vec{z}_0 \end{Bmatrix}}$$

vérifiant bien $\dim(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\})) = 5$.

Question 1.3. Par changement de point, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} &= \overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} \wedge \overrightarrow{BO} \\ &= L_B \vec{x}_0 + N_B \vec{z}_0 + (X_B \vec{x}_0 + Z_B \vec{z}_0) \wedge (a \vec{x}_0 - \mu \vec{y}_0) \\ &= (L_B + \mu Z_B) \vec{x}_0 + a Z_B \vec{y}_0 + (N_B - \mu X_B) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_B \vec{x}_0 + Z_B \vec{z}_0 \\ (L_B + \mu Z_B) \vec{x}_0 + a Z_B \vec{y}_0 + (N_B - \mu X_B) \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$

Par une démarche identique et sachant $\overrightarrow{CO} = -a \vec{x}_0 - \mu \vec{y}_0$, procédant aux changements de variables

$$B \rightarrow C \quad \text{et} \quad a \rightarrow -a$$

il vient :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\} = \left\{ \begin{array}{l} X_C \vec{x}_0 + Z_C \vec{z}_0 \\ (L_C + \mu Z_C) \vec{x}_0 - a Z_C \vec{y}_0 + (N_C - \mu X_C) \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$$

Avant de poursuivre, on peut remarquer que $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}$ est caractéristique d'une liaison glissière de direction \vec{y}_0 avec

$$\dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cup \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = 5$$

tel que le degré d'hyperstatisme soit

$$\begin{aligned} h &= \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \right) + \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) - \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cup \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) \\ &= \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cap \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = 3 \end{aligned}$$

et corresponde au nombre de paramètres géométriques à fixer pour s'assurer que les deux droites affines, axes des liaisons pivot glissant, soient parallèles et non confondues.

Question 1.4. Pour déterminer une expression de C_m en fonction de P on peut :

1. isoler **10** et écrire l'équation de moment autour de la droite (O, \vec{y}_0) , c'est-à-dire selon la mobilité en rotation permise par la liaison pivot \mathcal{L}_{0-10} , de laquelle on tire une expression du type $C_m = f(Y)$;
2. isoler **11** et écrire l'équation de résultante dans la direction \vec{y}_0 , c'est-à-dire selon les mobilités en translation permises par les deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles, de laquelle on tire une expression du type $Y = g(P)$;
3. par composition des résultats, on tire une expression du type

$$C_m = f \circ g(P)$$

Mise en œuvre de la stratégie :

1. On isole **10** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique. En particulier, l'équation de moment autour de l'axe (O, \vec{y}_0) donne :

$$/ (O, \vec{y}_0) : \quad \underbrace{\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0}_{0 \text{ (pivot } \mathcal{L}_{0-10})} + \overrightarrow{M_{O,11 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0 + C_m = 0$$

Avec, par théorème d'actions réciproques

$$\overrightarrow{M_{O,11 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0 = -\overrightarrow{M_{O,10 \rightarrow 11}} \cdot \vec{y}_0 = \frac{p}{2\pi} Y$$

il vient

$$C_m + \frac{p}{2\pi} Y = 0 \iff \boxed{C_m = \frac{-p}{2\pi} Y}$$

2. On isole **11** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique. En particulier, l'équation de résultante dans la direction \vec{y}_0 donne :

$$/ \vec{y}_0 : \quad \underbrace{\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} \cdot \vec{y}_0}_0 + \underbrace{\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}} \cdot \vec{y}_0}_0 + \overrightarrow{F_{10 \rightarrow 11}} \cdot \vec{y}_0 - P = 0$$

il vient

$$\boxed{Y = P}$$

3. Par substitution, il vient finalement :

$$\boxed{C_m = \frac{-p}{2\pi} P}$$

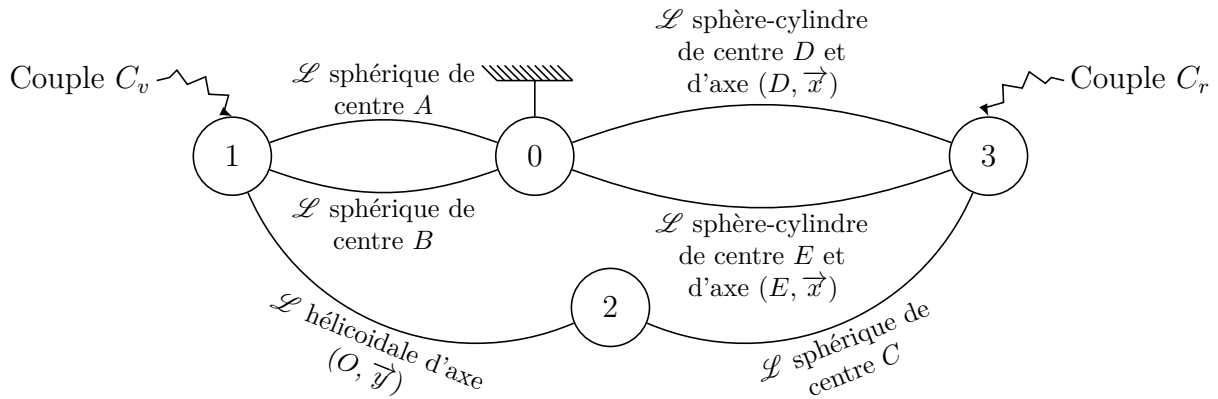
Question 1.5. Avec $p = 2\pi \text{ mm} = 2\pi \times 10^{-3} \text{ m}$ et $P = 100 \text{ N}$, il vient :

$$\boxed{C_m = -0,1 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

— EXERCICE 2 —

Boîtier de direction

Question 2.1. D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



Question 2.2. 1. On isole **1** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre A :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

— liaison sphérique de centre B :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

— liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{y}) et de pas réduit $p^* = p/(2\pi)$ à droite :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} - p^* Y_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

— couple d'entrée

$$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_v \vec{y} \end{Bmatrix}_*$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_v \vec{y} \end{Bmatrix}_* = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ donne :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & \quad 0 = X_A + X_B + X_{21} \\ / \vec{y} : & \quad 0 = Y_A + Y_B + Y_{21} \\ / \vec{z} : & \quad 0 = Z_A + Z_B + Z_{21} \end{aligned}$$

Par changement de point, il vient en O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}} &= \overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= (X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z}) \wedge -y_A \vec{y} \\ &= y_A (Z_A \vec{x} - X_A \vec{z}) \end{aligned}$$

et de façon similaire, avec le changement de variable $A \rightarrow B$, il vient :

$$\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}} = y_B (Z_B \vec{x} - X_B \vec{z})$$

d'où l'équation de moment au point O en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{aligned} / (O, \vec{x}) : & \quad 0 = y_A Z_A + y_B Z_B + L_{21} \\ / (O, \vec{y}) : & \quad \boxed{0 = C_v - p^* Y_{21}} \\ / (O, \vec{z}) : & \quad 0 = -y_A X_A - y_B X_B + N_{21} \end{aligned}$$

2. On isole **2** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre C :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z} \\ x_C (-Z_C \vec{y} + Y_C \vec{z}) \end{array} \right\}_O$$

obtenu par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,3 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{C,3 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{CO} \\ &= (X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z}) \wedge -x_C \vec{x} \\ &= x_C (-Z_C \vec{y} + Y_C \vec{z}) \end{aligned}$$

— liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{y}) et de pas réduit $p^* = p/(2\pi)$ à droite :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -X_{21} \vec{x} - Y_{21} \vec{y} - Z_{21} \vec{z} \\ -L_{21} \vec{x} + p^* Y_{21} \vec{y} - N_{21} \vec{z} \end{array} \right\}$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ donne :

$$\begin{aligned} /_{\vec{x}} : & \quad 0 = X_C - X_{21} \\ /_{\vec{y}} : & \quad 0 = \boxed{Y_C - Y_{21}} \\ /_{\vec{z}} : & \quad 0 = Z_C - Z_{21} \end{aligned}$$

L'équation de moment au point C en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{aligned} /(C, \vec{x}) : & \quad 0 = -L_{21} \\ /(C, \vec{y}) : & \quad 0 = -x_C Z_C + p^* Y_{21} \\ /(C, \vec{z}) : & \quad 0 = x_C Y_C - N_{21} \end{aligned}$$

3. On isole **3** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre C :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -X_C \vec{x} - Y_C \vec{y} - Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison sphère-cylindre de centre D et d'axe (D, \vec{x}) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{D}}\}_D = \left\{ \begin{array}{c} Y_D \vec{y} + Z_D \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— liaison sphère-cylindre de centre E et d'axe (E, \vec{x}) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{E}}\}_E = \left\{ \begin{array}{c} Y_E \vec{y} + Z_E \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

— couple de sortie

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{x} \end{array} \right\}_*$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{D}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{E}}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_r \vec{x} \end{array} \right\}_* = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ donne :

$$\begin{aligned} /_{\vec{x}} : & \quad 0 = -X_C \\ /_{\vec{y}} : & \quad 0 = -Y_C + Y_D + Y_E \\ /_{\vec{z}} : & \quad 0 = -Z_C + Z_D + Z_E \end{aligned}$$

Par changement de point, il vient en D :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{D,0\rightarrow 3}^{\textcircled{E}} &= \overrightarrow{M}_{E,0\rightarrow 3}^{\textcircled{E}} + \overrightarrow{F}_{0\rightarrow 3}^{\textcircled{E}} \wedge \overrightarrow{ED} \\
&= (Y_E \overrightarrow{y} + Z_E \overrightarrow{z}) \wedge (x_D - x_E) \overrightarrow{x} \\
&= (x_D - x_E) (Z_E \overrightarrow{y} - Y_E \overrightarrow{z}) \\
\overrightarrow{M}_{D,2\rightarrow 3} &= \overrightarrow{M}_{C,2\rightarrow 3} + \overrightarrow{F}_{2\rightarrow 3} \wedge \overrightarrow{CD} \\
&= -(X_C \overrightarrow{x} + Y_C \overrightarrow{y} + Z_C \overrightarrow{z}) \wedge [(x_D - x_C) \overrightarrow{x} + k \overrightarrow{z}] \\
&= -kY_C \overrightarrow{x} + (kX_C - (x_D - x_C)Z_C) \overrightarrow{y} + (x_D - x_C)Y_C \overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

d'où l'équation de moment au point D en projection dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$:

$$\begin{aligned}
/(D, \overrightarrow{x}) : & \quad \boxed{0 = -kY_C + C_r} \\
/(D, \overrightarrow{y}) : & \quad 0 = (x_D - x_E)Z_E + kX_C - (x_D - x_C)Z_C \\
/(D, \overrightarrow{z}) : & \quad 0 = -(x_D - x_E)Y_E + (x_D - x_C)Y_C
\end{aligned}$$

Question 2.3. À partir des 3 équations mises en évidence, c'est-à-dire :

— pour **1** isolé, équation de moment autour de l'axe (O, \overrightarrow{y})

$$C_v = p^* Y_{21}$$

— pour **2** isolé, équation de résultante dans la direction \overrightarrow{y}

$$Y_C = Y_{21}$$

— pour **3** isolé, équation de moment autour de l'axe (D, \overrightarrow{x})

$$C_r = kY_C$$

puis par simples substitutions successives, il vient

$$\boxed{C_r = \frac{k}{p^*} C_v}$$

Des 15 autres équations, on tire les inconnues d'actions mécaniques effectivement transmises par les liaisons, non demandées.

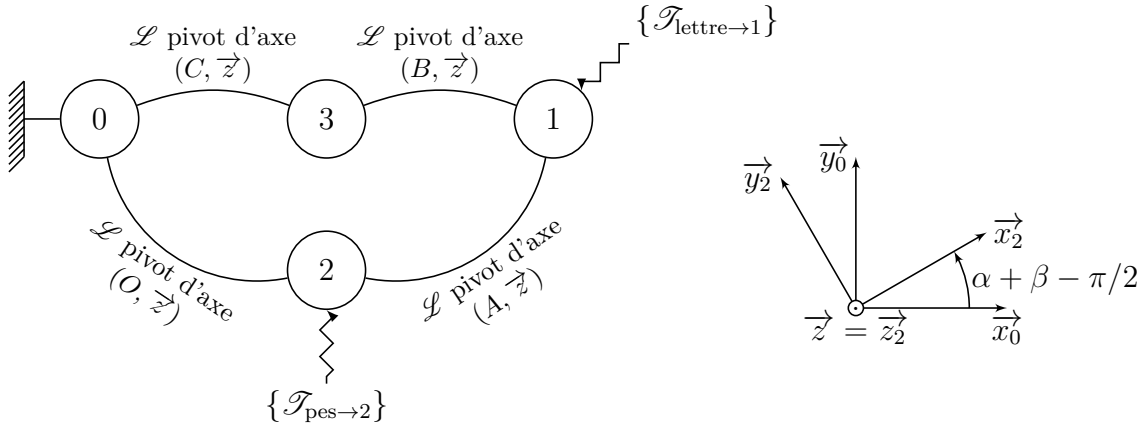
Question 2.4. Pour trouver le plus rapidement possible une relation entre C_r et C_v , il est nécessaire d'exploiter les mobilités des liaisons. En particulier, il est nécessaire de remarquer que c'est la translation de **2** par rapport à **1** dans la direction \overrightarrow{y} qui induit la rotation de **3** par rapport à **0** autour de la droite (DE) , translation elle-même induite, par l'intermédiaire de la liaison hélicoïdale, par la rotation de **1** par rapport à **0** autour de la droite (AB) . Avec ces éléments, il est clair qu'il faut :

- isoler **1** : équation de moment autour de l'axe (O, \overrightarrow{y}) , associée à la rotation autour de (AB) ;
- isoler **2** : équation de résultante dans la direction \overrightarrow{y} , associée à la translation dans la direction \overrightarrow{y} ;
- isoler **3** : équation de moment autour de l'axe (D, \overrightarrow{x}) , associé à la rotation autour de (DE) .

— EXERCICE 3 —

Pèse-lettre

Question 3.1. D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



Question 3.2. Par une démarche de résolution systématique, sachant que l'on a :

- 3 solides hors bâti ;
- 6 équations d'équilibre par solide en résolution spatiale ;

soit **18 équations** par produit et

- 4 liaisons pivot ;
- avec chacune 5 inconnues d'actions mécaniques transmissibles ;

soit **20 inconnues**, il vient que le rang du système doit vérifier

$$\text{rang} \leq \min(\text{nb équations}, \text{nb inconnues}) = 18 < \text{nb inconnues} = 20$$

Donc on ne peut pas résoudre sans faire d'hypothèse sur au moins 2 inconnues. Par contre, en faisant une résolution plane, dans un plan de normale \vec{z}_0 , c'est-à-dire en n'écrivant que l'équation de résultante dans les directions \vec{x}_0 et \vec{y}_0 et l'équation de moment autour d'un axe parallèle à \vec{z}_0 , alors les liaisons pivot se limitent à des glisseurs avec 2 inconnues chacune. Il vient alors que le rang du système doit vérifier

$$\text{rang} \leq \min(\text{nb équations}, \text{nb inconnues}) = 8 < \text{nb équations} = 9$$

donc il semble possible de résoudre.

Question 3.3. On procède à une **résolution plane** dans un plan de normale \vec{z}_0 . On identifie que **3** est soumis à deux glisseurs. Par théorème, il vient que l'axe central de $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 3}\}$ est la droite $(BC) = (B, \vec{x}_2)$ telle que, par théorème d'actions réciproques on ait :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_3 \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

On isole **1**.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} F_3 \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— poids des lettres, supposant $G_1 \in (A, \vec{y}_0)$

$$\{\mathcal{T}_{\text{lettres} \rightarrow 1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} -m_1 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

1 est en équilibre dans un référentiel galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{\text{lettres} \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_0 &= \cos\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha + \beta) \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 &= \sin\left(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

et choisissant le point A pour l'équation de moment, il vient par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{A,3 \rightarrow 1}} &= \overrightarrow{M_{B,3 \rightarrow 1}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= F_3 \vec{x}_2 \wedge b \vec{y}_0 \\ &= b F_3 \sin(\alpha + \beta) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où on tire les trois équations :

$$\begin{aligned} / \vec{x}_0 : \quad & 0 = X_A + F_3 \sin(\alpha + \beta) \\ / \vec{y}_0 : \quad & 0 = Y_A - m_1 g - F_3 \cos(\alpha + \beta) \\ / (A, \vec{z}_0) : \quad & 0 = b F_3 \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

On en déduit que pour toute configuration, c'est-à-dire $\alpha + \beta$ quelconque :

$$\begin{cases} 0 = X_A + F_3 \sin(\alpha + \beta) \\ 0 = Y_A - m_1 g - F_3 \cos(\alpha + \beta) \\ 0 = b F_3 \sin(\alpha + \beta) \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = m_1 g \\ F_3 = 0 \end{cases}}$$

On note que l'effort F_3 est nul tant que $G_1 \in (A, \vec{y}_0)$. Dès que la distance du point G_1 à la droite (A, \vec{y}_0) est non nulle, l'action du poids des lettres induit un moment autour de l'axe (A, \vec{z}_0) qui doit être compensé par l'action de la barre **3** telle que l'on ait

$$bF_3 \sin(\alpha + \beta) + m_1 g \overrightarrow{G_1 A} \cdot \vec{x}_0 = 0 \iff F_3 = \frac{m_1 g}{b} \overrightarrow{AG_1} \cdot \vec{x}_0$$

On isole **2**.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 2}\} = \underset{B}{\left\{ \begin{array}{c} X_O \vec{x}_0 + Y_O \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) , par théorème d'actions réciproques

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = -\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} -X_A \vec{x}_0 - Y_A \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

— pesanteur sur la masse en G_2

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 2}\} = \underset{G_2}{\left\{ \begin{array}{c} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

2 est en équilibre dans un référentiel galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

Choisissant le point O pour l'équation de moment, il vient par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,1 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{A,1 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 1}} \wedge \overrightarrow{OA} \\ &= (X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0) \wedge -a \vec{x}_2 \\ &= a [X_A \cos(\alpha + \beta) + Y_A \sin(\alpha + \beta)] \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M_{O,\text{pes} \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{G_2,\text{pes} \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{\text{pes} \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{G_2 O} \\ &= -m_2 g \vec{y}_0 \wedge L (\cos(\alpha) \vec{y}_0 - \sin(\alpha) \vec{x}_0) \\ &= -m_2 g L \sin(\alpha) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

d'où on tire les trois équations :

$$\begin{aligned} / \vec{x}_0 : & \quad 0 = X_O - X_A \\ / \vec{y}_0 : & \quad 0 = Y_O - Y_A - m_2 g \\ / (O, \vec{z}_0) : & \quad 0 = a [X_A \cos(\alpha + \beta) + Y_A \sin(\alpha + \beta)] - m_2 g L \sin(\alpha) \end{aligned}$$

En tenant compte des expressions trouvées à la suite de l'isolement de **1**, il vient :

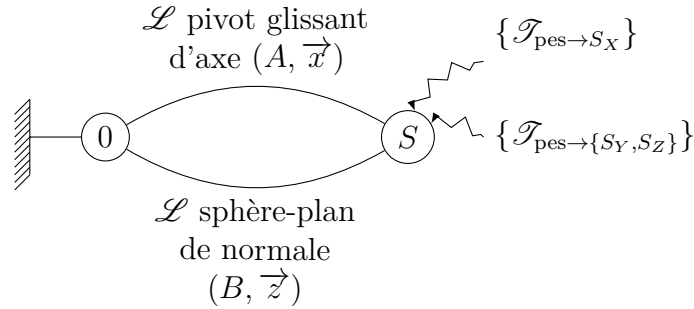
$$\begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O = (m_1 + m_2) g \\ 0 = am_1 g \sin(\alpha + \beta) - m_2 g L \sin(\alpha) \end{cases}$$

d'où on tire, pour tout $\alpha + \beta \neq 0 [\pi]$, l'expression :

$$m_1 = \left(\frac{L \sin(\alpha)}{a \sin(\alpha + \beta)} \right) m_2$$

Glissière de cellule d'injection plastique

Question 4.1. D'après les données du sujet, il vient le graphe de structure suivant :



Question 4.2. On isole l'ensemble S . Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{x}) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}}\} = \left\{ \begin{array}{l} Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ M_A \vec{y} + N_A \vec{z} \end{array} \right\}_A$$

— liaison sphère-plan de normale (B, \vec{z}) :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}\} = \left\{ \begin{array}{l} Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

— action de la pesanteur sur le module S_X :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S_X}\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_X g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_X}$$

— action de la pesanteur sur l'ensemble mobile $\{S_Y, S_Z\}$:

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_{YZ} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{YZ}}$$

Question 4.3. $S = \{S_X, S_Y, S_Z\}$ est en équilibre dans un référentiel galiléen. On lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S_X}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}\} = \{0\}$$

Équation de résultante :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & 0 = 0 \\ / \vec{y} : & 0 = Y_A \\ / \vec{z} : & 0 = Z_A + Z_B - (M_X + M_{YZ}) g \end{aligned}$$

Pour écrire l'équation de moment au point A , on exprime par changement de point les moments au point A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} &= \overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= Z_B \overrightarrow{z} \wedge E \overrightarrow{y} \\ &= -EZ_B \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

Procédant aux simples changements de variables $Z_B \rightarrow -M_X g$ et $E \rightarrow a$ et $Z_B \rightarrow -M_{YZ} g$ et $E \rightarrow -CY$, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,\text{pes} \rightarrow S_X}} &= aM_X g \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{M_{A,\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}} &= -CY M_{YZ} g \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

d'où l'équation de moment au point A :

$$\begin{aligned}/(A, \overrightarrow{x}) : & 0 = -EZ_B + aM_X g - CY M_{YZ} g \\ / (A, \overrightarrow{y}) : & 0 = M_A \\ / (A, \overrightarrow{z}) : & 0 = N_A\end{aligned}$$

Avec l'équation de moment autour de l'axe (A, \overrightarrow{x}) , on trouve :

$$Z_B = g \frac{aM_X - CY M_{YZ}}{E} \implies \boxed{\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} g \frac{aM_X - CY M_{YZ}}{E} \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

Exploitant ce résultat dans l'équation de résultante dans la direction \overrightarrow{z} , il vient :

$$Z_A = g \left[\left(1 - \frac{a}{E}\right) M_X + \left(1 + \frac{CY}{E}\right) M_{YZ} \right]$$

d'où

$$\boxed{\left\{ \mathcal{F}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} g \left[\left(1 - \frac{a}{E}\right) M_X + \left(1 + \frac{CY}{E}\right) M_{YZ} \right] \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

Question 4.4. Le sens de l'effort exercé par la liaison sphère-plan dépend du signe de Z_B . Comme g et E sont positifs, il vient par application numérique :

$$aM_X - CY M_{YZ} = 0,2 \times 230 - 0,5 \times 120 = 46 - 60 = -14 \implies Z_B < 0$$

qui signifie que l'action de la liaison sphère-plan est dirigée vers le bas, selon $-\overrightarrow{z}$.

Question 4.5. Comme nous avons isolé S , l'action du rail $\mathbf{0}$ est transmise par le galet $\mathbf{9}$ si, et seulement si, son action est dirigée vers le bas, selon $-\overrightarrow{z}$, qui correspond à

$$Z_B < 0 \iff aM_X - CY M_{YZ} < 0 \iff \boxed{CY > a \frac{M_X}{M_{YZ}}}$$

et que l'on traduit en condition sur la position du centre de gravité de l'ensemble mobile $\{S_Y, S_Z\}$.

Question 4.6. Par application numérique, on a :

$$Z_B = \frac{g}{E} (aM_X - CYM_{YZ}) = \frac{9,81}{0,5} \times -14 \approx 274,7 \text{ N}$$

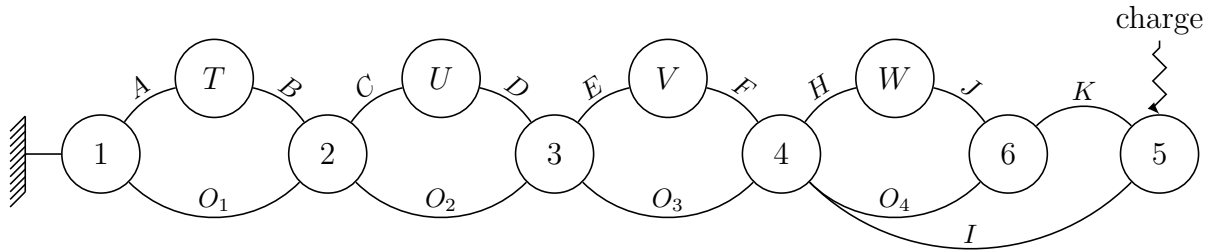
— EXERCICE 7 —

Excavatrice



Ces éléments de corrigé sont rédigés pour une seule configuration géométrique ; leur transposition à l'autre étant supposée évidente.

Question 7.1. Le mécanisme pouvant être représenté dans un plan de normale notée \vec{z} , on procède à une étude plane telle que chaque liaison pivot d'axe (\square, \vec{z}) soit simplement notée \square sur le graphe de structure.

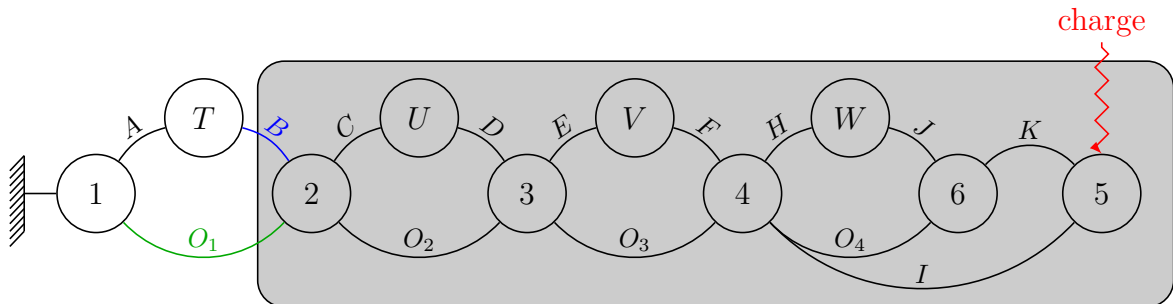


Notant que les vérins T , U , V et W sont chacun soumis à 2 glisseurs, il vient par théorème d'un solide soumis à deux glisseurs que les axes centraux des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les vérins sont :

- $T : \Delta \overrightarrow{F_{T \rightarrow 2}} = (AB)$;
- $U : \Delta \overrightarrow{F_{U \rightarrow 3}} = (CD)$;
- $V : \Delta \overrightarrow{F_{V \rightarrow 4}} = (EF)$;
- $W : \Delta \overrightarrow{F_{W \rightarrow 6}} = (GH)$.

Action mécanique développée par le vérin T

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin T , on isole l'ensemble $S_T = \{2, 3, 4, 5, 6, U, V, W\}$ soumis à trois glisseurs :

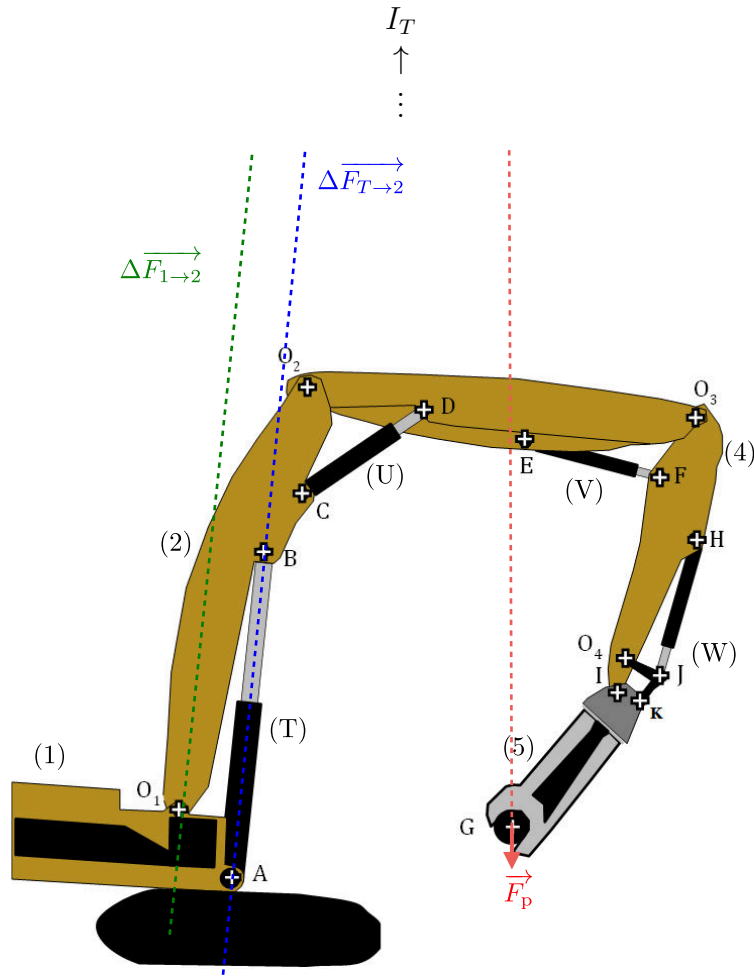


- l'action de la charge (connue) ; ↗
- l'action du vérin T (axe central connu) ; / (AB)
- action de la liaison pivot avec $\mathbf{1}$ (glisseur au point O_1). ✕ O_1

Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{S}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$ et $\{\mathcal{S}_{T \rightarrow 2}\}$ sont sécants au point I_T , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{S}_{1 \rightarrow 2}\}$ comme la droite $(O_1 I_T)$. Au point I_T , il vient alors :

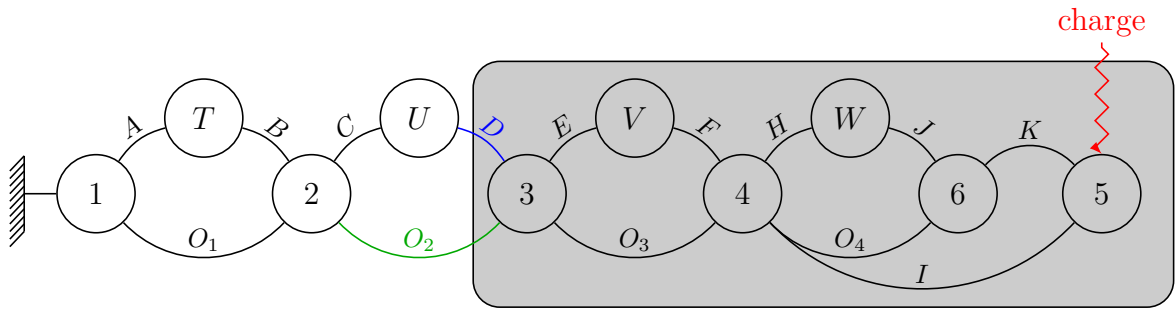
$${}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_{T \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Malheureusement, le document réponse n'est pas suffisamment grand dans cette configuration pour réaliser la construction.



Action mécanique développée par le vérin U

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin U , on isole l'ensemble $S_U = \{3, 4, 5, 6, V, W\}$ soumis à trois glisseurs :



- l'action de la charge (connue); ↗
- l'action du vérin U (axe central connu); ↗ (CD)
- action de la liaison pivot avec **2** (glisseur au point O_2). ✕ O_2

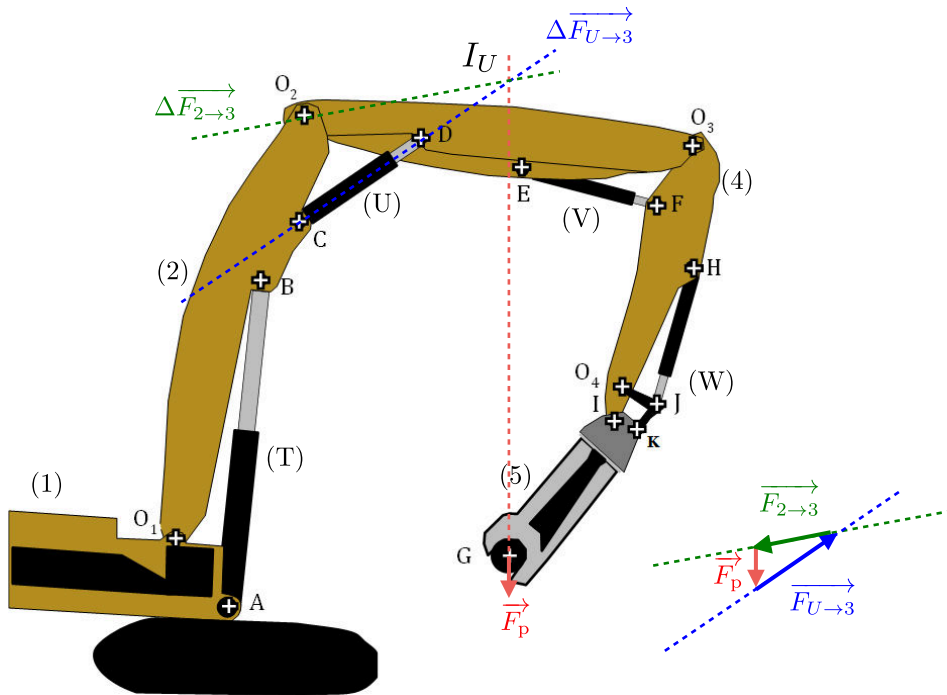
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$ et $\{\mathcal{T}_{U \rightarrow 3}\}$ sont sécants au point I_U , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\}$ comme la droite $(O_2 I_U)$. Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point I_U on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_U} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{U \rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_U} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{2 \rightarrow 3} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_U} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

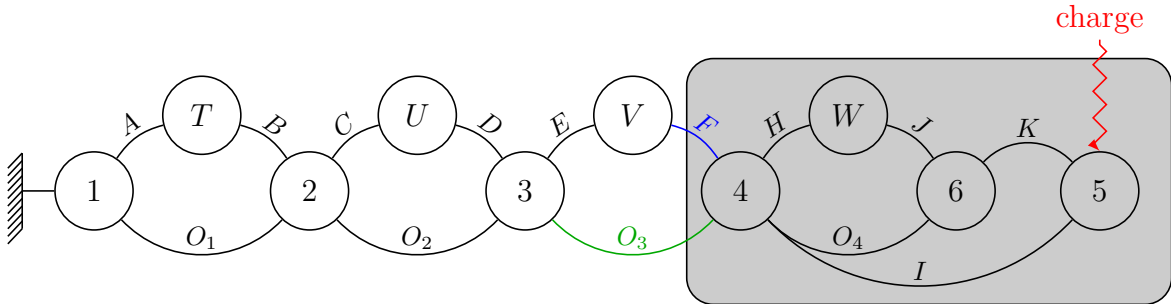
$$\vec{F}_p + \vec{F}_{U \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



Action mécanique développée par le vérin V

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin V , on isole l'ensemble $S_V = \{4, 5, 6, W\}$ soumis à trois glisseurs :



- l'action de la charge (connue); ↗
- l'action du vérin V (axe central connu); ↘ (EF)
- action de la liaison pivot avec 2 (glisseur au point O_3). ✕ O_3

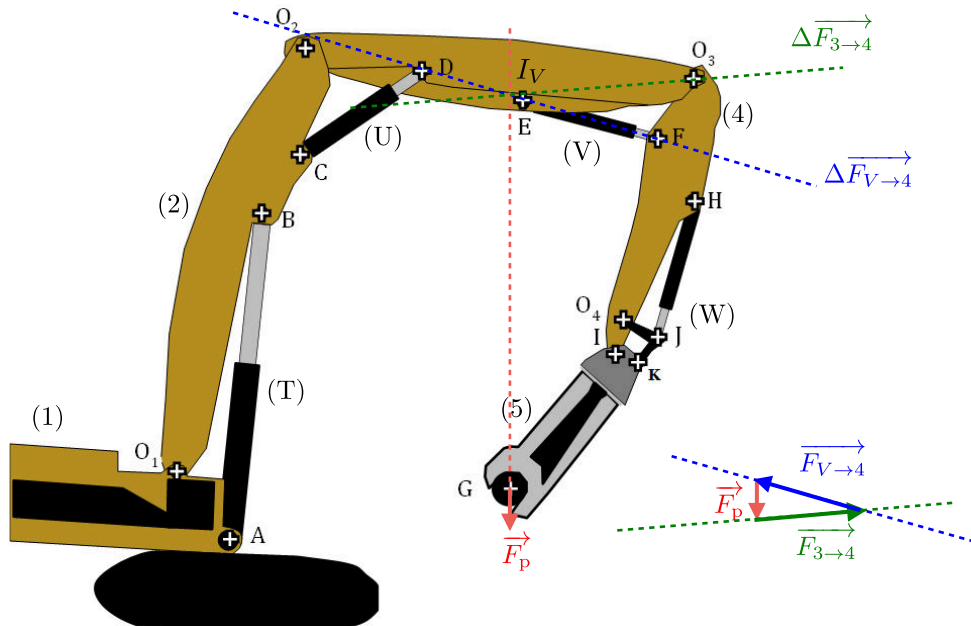
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$ et $\{\mathcal{T}_{V \rightarrow 4}\}$ sont sécants au point I_V , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 4}\}$ comme la droite $(O_3 I_V)$. Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point I_V on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_V} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{V \rightarrow 4} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_V} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{3 \rightarrow 4} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_V} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{V \rightarrow 4} + \vec{F}_{3 \rightarrow 4} = \vec{0}$$




qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



Action mécanique développée par le vérin W

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin W , il est nécessaire de procéder en deux temps :

1. on isole **5** soumis à trois glisseurs :

- l'action de la charge (connue); 
- l'action de **6** (axe central connu);  (KJ) (donné dans le sujet)
- action de la liaison pivot avec **4** (glisseur au point I). 

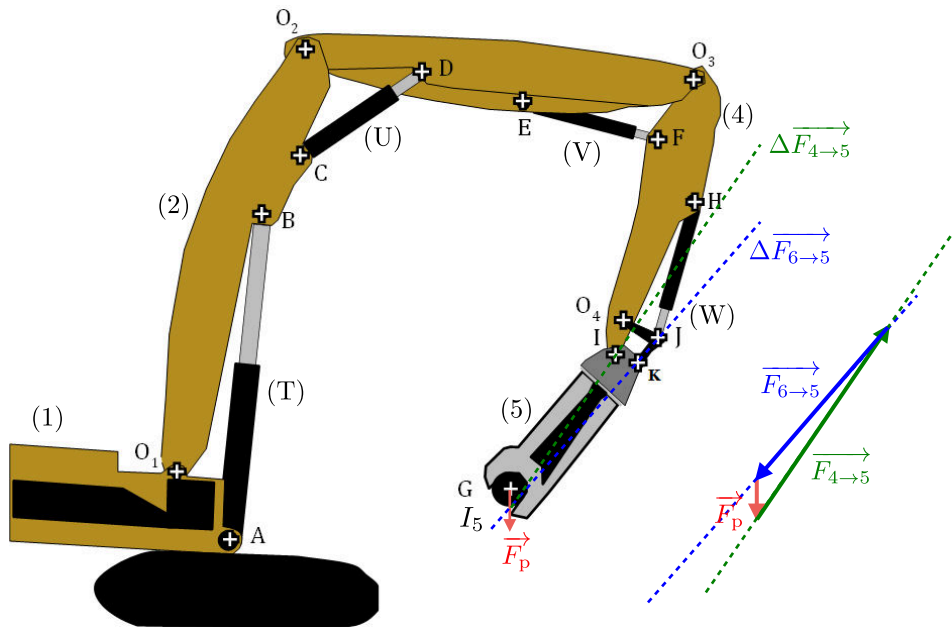
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$ et $\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 5}\}$ sont sécants au point I_5 , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 5}\}$ comme la droite (I_5I) . Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point I_5 on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{6 \rightarrow 5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{4 \rightarrow 5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} = \{0\}$$



il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{6 \rightarrow 5} + \vec{F}_{4 \rightarrow 5} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



2. on isole **6** soumis à trois glisseurs :

- l'action de **5** (connue); 
- l'action du vérin W (axe central connu);  (HJ)

— action de la liaison pivot avec 4 (glisseur au point O_4). $\times O_4$

Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 6}\}$ et $\{\mathcal{T}_{W \rightarrow 6}\}$ sont sécants au point J , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 6}\}$ comme la droite (O_4J) . Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point J on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{5 \rightarrow 6}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_J + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{W \rightarrow 6}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_J + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_J = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\overrightarrow{F_{5 \rightarrow 6}} + \overrightarrow{F_{W \rightarrow 6}} + \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.

