# [P18] Mouvement dans un champ de force centrale conservatif

## Exercice 1. Vitesses cosmiques

1. La trajectoire de satellisation minimale est une orbite rasante, circulaire de centre le centre de la Terre et de rayon celui de la Terre.
2. On a montré dans le cours l'expression de la vitesse pour une trajectoire circulaire : $\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}} = 7{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.
3. Pour être en état de diffusion afin de s'abstraire de l'attraction gravitationnelle de la Terre, l'énergie mécanique doit être supérieure à 0 dans le référentiel géocentrique.
4. À la surface de la Terre, $\boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}M_R}{R_T}}$.
5. Ainsi il faut une énergie cinétique $\mathcal{E}_c \geqslant -\mathcal{E}_p$ soit $\frac{1}{2}mv^2 > \frac{\mathcal{G}M_R}{R_T}$ donc la deuxième vitesse cosmique vaut $\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = 11{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.

## Exercice 2. Lancement d'une fusée

1. Une base située à la surface de la Terre à la latitude $\lambda$ possède dans le référentiel géocentrique un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = R_T\cos(\lambda)$ et de période $T$, donc de vitesse $v_0 = \frac{2\pi R}{T}$ soit $\boxed{v_0 = \frac{2\pi R_T}{T}\cos(\lambda)}$.
2. L'énergie mécanique massique initiale vaut $e_{m,i} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}$ soit $\boxed{e_{m,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi R_T}{T}\cos(\lambda)\right)^2 - \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}}$.
3. L'orbite circulaire de l'ISS correspond à une énergie mécanique massique (voir cours) $\boxed{e_{m,f} = -\frac{\mathcal{G}M_T}{2(R_T+h)}}$.
4. L'énergie mécanique massique à apporter doit donc valoir $\boxed{\Delta e_m = e_{m,f} - e_{m,i} = \mathcal{G}M_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T+h)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi R_T}{T}\cos(\lambda)\right)^2}$. Plus $\lambda$ est proche de 0, plus cet apport d'énergie est faible.
5. Pour Kourou, on calcule $\underline{\Delta e_m(\text{Kourou}) = 3{,}272\times 10^7\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}}$.
   Pour Paris, $\underline{\Delta e_m(\text{Paris}) = 3{,}278\times 10^7\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}}$.
   L'écart relatif n'est que de $\underline{0{,}18\,\%}$.

## Exercice 3. Orbite de Hohmann

1. Le grand-axe de l'ellipse ($2a$) est égal à la somme des rayons des orbites terrestre et martienne, d'où $\boxed{a = (R_T + R_M)/2} = \underline{1{,}89\times 10^{11}\,\mathrm{m}}$.
2. L'énergie mécanique vaut (voir cours) : $\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{2a}$.

   On calcule la vitesse à partir de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}M_S m}{2a} + \frac{\mathcal{G}M_S m}{r}$ donc :
   $$\boxed{v = \sqrt{\mathcal{G}M_S\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}}$$
3. Au moment où le vaisseau change d'orbite, $r$ reste inchangé mais $a$ est modifié :
   — pour placer le vaisseau sur l'orbite de Hohmann depuis la Terre : $v_i = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{r_T}} = 29{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $v_f = \sqrt{\mathcal{G}M_S\left(\frac{2}{r_T} - \frac{1}{a}\right)} = 32{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ soit une augmentation de $\underline{3{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.
   — pour passer de l'orbite de Hohmann à l'orbite martienne : $v_i = \sqrt{\mathcal{G}M_S\left(\frac{2}{r_M} - \frac{1}{a}\right)} = 21{,}5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $v_f = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{r_M}} = 24{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ soit une augmentation de $\underline{2{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$.
4. La durée du voyage est la moitié de la période de révolution sur l'orbite de Hohmann (notée H).

   D'après la troisième loi de Kepler, $\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{H}} = \left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{Terre}}$ d'où $\frac{T_{\text{H}}}{T_{\text{Terre}}} = \left(\frac{a}{r_T}\right)^{3/2} = (1,89/1,50)^{3/2} = 1,41$.
   La période de révolution sur l'orbite de Hohmann est donc de 1,41 an. Le voyage interplanétaire dure $\underline{0{,}71\,\text{an}}$, soit 258 jours.
5. Mars parcourt un angle $\pi - \alpha$ pendant ce voyage, qui représente une portion $\frac{\pi-\alpha}{2\pi}$ de son orbite complète qui a une durée $T_{\text{Mars}}$. On en déduit que $T_H = (1-\alpha/\pi)T_M$ soit $\alpha = \pi\times\left(1 - \frac{T_H}{T_{\text{Mars}}}\right) = \pi\times\left(1 - \left(\frac{a}{r_M}\right)^{3/2}\right) = 0{,}245\pi = \underline{44°}$.
6. L'angle parcouru par la Terre dans le temps $t$ est $2\pi t/T_{\text{Terre}}$ et celui parcouru par Mars $2\pi t/T_{\text{Mars}}$.

Elles se retrouvent avec le même angle relatif (modulo $2\pi$) lorsque $2\pi t/T_{\text{Terre}} - 2\pi t/T_{\text{Mars}} = k.2\pi$ soit $t = k\dfrac{1}{\dfrac{1}{T_{\text{Mars}}} - \dfrac{1}{T_{\text{Terre}}}} = kT_{\text{Terre}} \times \dfrac{1}{1 - T_{\text{Terre}}/T_{\text{Mars}}} = kT_{\text{Terre}} \times \dfrac{1}{1-(r_T/r_M)^{3/2}}$ d'après la troisième loi de Kepler.

$\dfrac{1}{1-(r_T/r_M)^{3/2}} = 2{,}14$ donc la périodicité de la configuration est de $\underline{2{,}14\,\text{an}}$.

## Exercice 4. Perte d'altitude d'un satellite

1. Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon $r = R_T + h$, on a montré dans l'exercice A que $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T+h}}}$ et $\boxed{\mathcal{E}_m = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{2(R_T+h)}}$.
2. Sous l'effet des frottements, l'énergie mécanique décroît, donc l'altitude décroît mais la vitesse augmente, ce qui est étonnant. Cela vient du fait que l'énergie potentielle joue un rôle plus important que l'énergie cinétique au sein de l'énergie mécanique.
3. D'après le TPM, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F})$ soit $\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{2(R_T+h)^2}\dot{h} = -\alpha m v^3 = -\alpha m\left(\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R_T+h}\right)^{3/2}$ donc $\boxed{\dot{h} = -2\alpha\sqrt{\mathcal{G}M_T(R_T+h)}}$.
4. Pour un tour, $h$ reste quasi-constant donc $\dot{h} = \dfrac{\Delta h}{T}$ où la période $T = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_T+h)^3}{\mathcal{G}M_T}}$.

   On en déduit $\alpha = \dfrac{-\Delta h}{2T\sqrt{\mathcal{G}M_T(R_T+h)}}$ soit $\boxed{\alpha = \dfrac{-\Delta h}{4\pi(R_T+h)^2}} = \underline{1{,}54\times10^{-15}\,\text{m}^{-1}}$.
5. En posant $x = \sqrt{R_T+h}$ , on remarque que $\dot{x} = \dfrac{\dot{h}}{2\sqrt{R_T+h}} = -\alpha\sqrt{\mathcal{G}M_T}$ qui est constant.

   On a donc $x(t) = x(0) - \alpha\sqrt{\mathcal{G}M_T}t$.

   Ainsi, $h(t) = \left(\sqrt{R_T+h(0)} - \alpha\sqrt{\mathcal{G}M_T}t\right)^2 - R_T$.

   Au bout de 10 ans soit pour $t = 3{,}16\times10^8\,\text{s}$, on calcule $h(t) = 748\,\text{km}$ soit une perte d'altitude de $\underline{52\,\text{km}}$.

   On peut aussi calculer le nombre de révolutions en 10 ans, en supposant q ue l'altitude reste quasiment constante. La période initiale vaut $T_i = 6{,}06\times10^3\,\text{s}$, ce qui fait $3{,}16\times10^8/6{,}06\times10^3 = 5{,}21\times10^4$.

   La perte d'annule d'altitude est $5{,}21\times10^4\times1{,}0\,\text{m} = 52\,\text{km}$.

## Exercice 5. Collision d'une météorite

1. $\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM_0}\wedge\vec{v}_0$ soit $\boxed{\vec{L}_O = mv_0 b\vec{e}_z}$ où $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\vec{v}_0$, tel que $(\overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0, \vec{e}_z)$ forme un trièdre direct. Il se conserve car le mouvement est à force centrale de centre $O$. Notamment le vecteur $\overrightarrow{OM}$ restera perpendiculaire à $\vec{e}_z$ : le mouvement sera plan.
2. On reprend les calculs du cours (à savoir refaire) : $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r}}$ où la constante des aires $C = L_O/m = bv_0$. Son allure est celle donnée dans le cours.

   Au point $A$ la distance $r$ passe par un minimum, donc l'énergie cinétique radiale s'annule (point de rebroussement pour cet état de diffusion). Par conséquent, $\underline{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_A) = \mathcal{E}_m}$ au point $A$.
3. L'énergie mécanique de la météorite se conserve : on la calcule en prenant sa valeur initiale où $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ et $\mathcal{E}_p = 0$ (il est infiniment loin). En conclusion $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2$.

   Le point $A$ est donc tel que $\dfrac{mb^2v_0^2}{2r_A^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_A} = \dfrac{1}{2}mv_0^2$.

   En multipliant par $2r_A^2/(mv_0^2)$ on obtient que $r_A$ est racine d'un polynôme du second degré : $x^2 + 2\dfrac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}x - b^2 = 0$.

   Seule la racine positive a la signification physique d'une distance :

$$\boxed{d = r_A = -\frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}\right)^2 + b^2}}$$

4. La météorite rencontre la Terre si $d \leqslant R$. Il vient $\boxed{b \leqslant \sqrt{R^2 + \dfrac{2\mathcal{G}M_T R}{v_0^2}}}$.
5. Si la météorite évite la Terre, elle se maintient dans son état de diffusion, avec une trajectoire hyperbolique. A la fin, il a la même vitesse et le même paramètre d'impact qu'au début, il a simplement été dévié.

## Exercice 6. Mouvement d'une bille sur un cône

1. Les forces exercées sur la bille sont son poids et la réaction normale du cône. Le poids est conservatif et la réaction normale ne travaille pas donc l'énergie mécanique se conserve.

   De plus les moments de ces forces sont nuls par rapport à l'axe $Oz$ : le poids a une direction colinéaire à $Oz$ et la droite d'action de la réaction normale passe par l'axe. On en conclut que le moment cinétique par rapport à l'axe $Oz$ se conserve.

2. En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ où $r = z\tan(\alpha)$ sur le cône.
   $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$ donc $\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z + m(z\dot{r} - r\dot{z})\vec{e}_\theta - mzr\dot{\theta}\vec{e}_r$.
   Le moment par rapport à $Oz$ a pour expression $L_{Oz} = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta} = m\tan^2(\alpha)z^2\dot{\theta}$.
   À l'instant initial, $\vec{v} = v_0\vec{e}_\theta$ et $\overrightarrow{OM} = z_0\vec{e}_z + z_0\tan(\alpha)\vec{e}_r$ donc $L_{Oz} = mv_0z_0\tan(\alpha)$.
   Ainsi $\dot{\theta} = \dfrac{v_0z_0}{\tan(\alpha)z^2}$ et $r\dot{\theta} = \dfrac{v_0z_0}{z}$.
   L'énergie cinétique a pour expression $\mathcal{E}_c = \dfrac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right] = \dfrac{m}{2}\left[\dot{z}^2\left(1 + \tan^2(\alpha)\right) + \dfrac{(v_0z_0)^2}{z^2}\right]$.
   L'énergie mécanique vaut alors :
   $$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{m}{2}\left(1 + \tan^2(\alpha)\right)\dot{z}^2 + \frac{m(v_0z_0)^2}{2z^2} + mgz}$$
3. L'énergie potentielle effective pour le mouvement vertical est la partie de l'énergie mécanique qui dépend de l'altitude $z$ : $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(z) = \dfrac{m(v_0z_0)^2}{2z^2} + mgz}$.
   Lorsque $z \to 0$, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(z) \sim \dfrac{m(v_0z_0)^2}{2z^2} \to +\infty$ et lorsque $z \to +\infty$,$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(z) \sim mgz \to +\infty$. L'énergie potentielle effective consiste donc en un puits de potentiel.
4. Le mouvement est borné entre deux valeurs de $z$ telles que $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$ (sauf si $z_0 = v_0^2/g$, alors on est au fond du puits et le mouvement s'effectue à altitude constante).