

L'objectif est d'intégrer la trajectoire d'un point matériel soumis à une force centrale conservative en utilisant la constante des aires.

Notebook

| numéro **c602-3623189** sur <https://capytale2.ac-paris.fr>

Principe

Soit un point matériel de masse m soumis à une force centrale conservative $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$ où $F(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}$ avec $\mathcal{E}_p(r)$ l'énergie potentielle associée.

Dans ce cas le mouvement est plan. En coordonnées polaires, la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante nommée constante des aires. Elle est déterminée par les conditions initiales.

L'accélération du point matériel est purement radiale et s'écrit :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r = \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} \right) \vec{e}_r$$

La deuxième loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, se met alors sous forme d'une équation différentielle du deuxième ordre pour $r(t)$:

$$\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} + \frac{F(r)}{m}$$

Pour résoudre cette équation, on la décompose en deux équations du premier ordre en introduisant la variable $v_r(t) = \dot{r}$. Ainsi, on détermine le mouvement complet en résolvant numériquement le système suivant d'équations différentielles couplées du premier ordre :

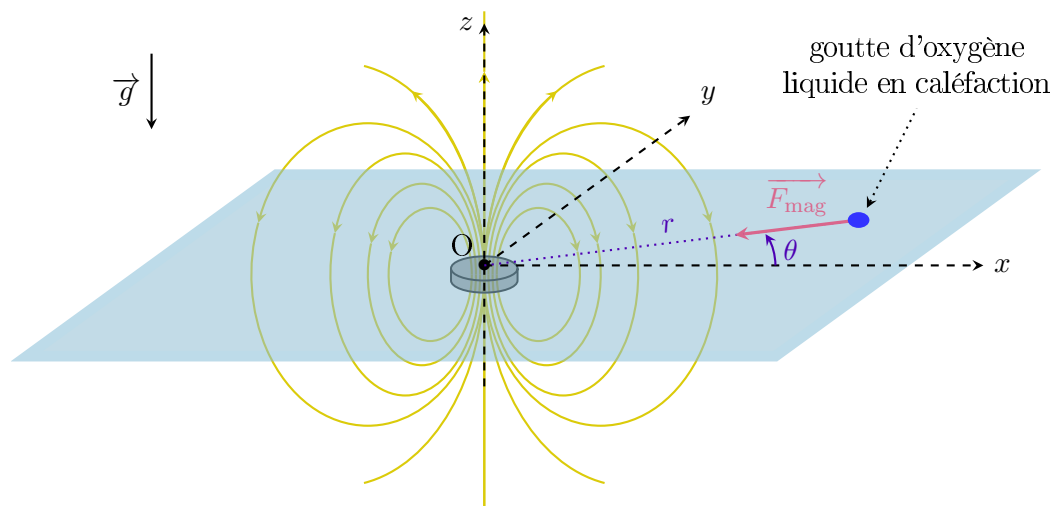
$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2(t)} \\ \frac{dr}{dt} = v_r(t) \\ \frac{dv_r}{dt} = \frac{C^2}{r^3(t)} + \frac{F(r(t))}{m} \end{cases}$$

Cette méthode fonctionne pour tout type de force centrale. Dans le cas des forces Newtoniennes (gravitationnelle et électrostatique), les solutions sont connues exactement. Nous allons l'appliquer à un mouvement plus original.

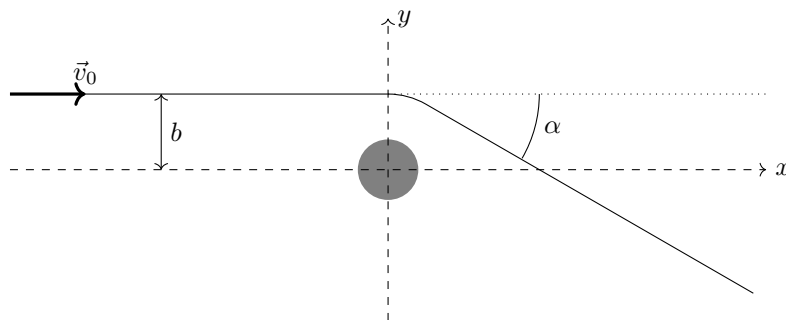
Mouvement étudié

Pendant son doctorat, Keyvan Piroird a étudié le mouvement d'une goutte d'oxygène liquide sur une plaque de verre horizontale sous l'action du champ magnétique exercé par un petit aimant cylindrique situé sous la plaque.

La goutte est en caléfaction : la plaque étant à une température bien plus grande que sa température d'ébullition, la goutte s'entoure d'une couche de vapeur qui l'isole et lui permet de se déplacer quasiment sans frottement sur la surface (on observe le même phénomène avec des gouttes d'eau sur une poêle très chaude).

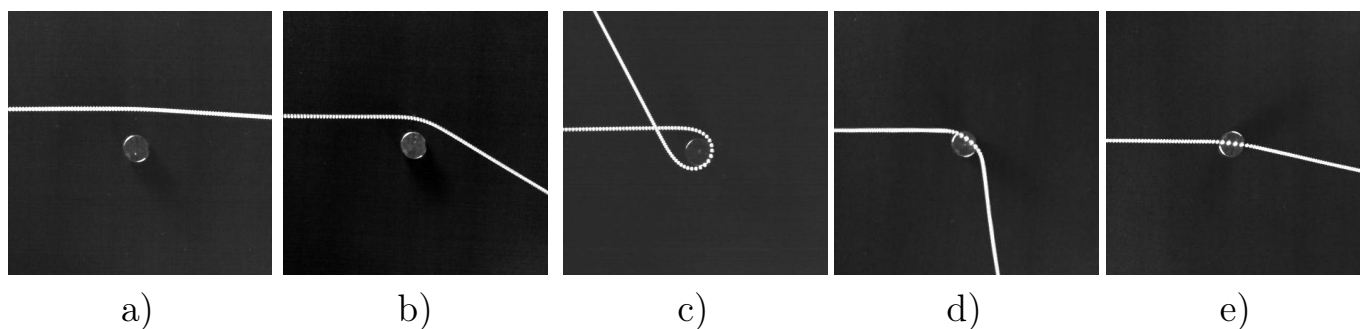


L'expérience consiste à envoyer la goutte avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , de sorte à ce qu'elle passe à proximité de l'aimant. On note b le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance entre la trajectoire rectiligne initiale et le centre de l'aimant. On note α l'angle de déviation de la trajectoire.



Voici les trajectoires obtenues expérimentalement pour une vitesse $v_0 = 25 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, en variant le paramètre d'impact :

a) $b = 15 \text{ mm}$; $\alpha = 3^\circ$; b) $b = 11 \text{ mm}$; $\alpha = 30^\circ$; c) $b = 9 \text{ mm}$; $\alpha = 245^\circ$; d) $b = 5 \text{ mm}$; $\alpha = 85^\circ$; e) $b = 1 \text{ mm}$; $\alpha = 15^\circ$.



Grâce à ces résultats, K. Piroird a pu modéliser la force magnétique subie par la goutte. C'est une force centrale dérivant de l'énergie potentielle volumique :

$$e_p(r) = -\frac{e_0}{q + (r/d)^6}$$

où les paramètres ont les valeurs expérimentales suivantes :

- $e_0 = 9,409 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$ est une énergie volumique caractéristique ;
- $q = 0,084$ est un paramètre sans dimension ;
- $d = 8,45 \text{ mm}$ est une distance caractéristique.

Simulation numérique

L'objectif du TP est de reproduire ces trajectoires à l'aide d'une simulation numérique. On pourrait pour ce faire utiliser la méthode d'Euler, mais on va utiliser un algorithme plus puissant, qui est implémenté dans la fonction `odeint` de la bibliothèque Python `scipy.integrate`. Elle prend les arguments suivants :

- la fonction `fun` définissant le système différentiel à résoudre. On définira séparément cette fonction dans le code. Elle devra comporter deux arguments obligatoires : un vecteur `y` contenant les variables puis l'instant `t` ; ainsi que d'autres arguments éventuels. Elle renverra un vecteur contenant les dérivées des trois variables.
- un vecteur `y_0` contenant les conditions initiales des variables.
- un array `t_eval` contenant les instants auxquels les variables sont évaluées : on utilisera l'instruction `np.linspace(t0,tf,N)` (N instants répartis régulièrement entre t0 et tf).
- un tuple `args` contenant les arguments supplémentaires à passer à la fonction `fun`.

L'appel de la fonction se fait donc sous la forme :

```
sol=odeint (fun, y_0, t_eval, args=())
```

La fonction renvoie un array de vecteurs contenant les variables évaluées aux instants successifs choisis : `sol[:, 0]` est l'ensemble des valeurs prises par la première variable, `sol[:, 1]` les valeurs prises par la deuxième, etc.

Mise en œuvre

Questions théoriques

On prend comme position initiale pour la goutte le point de coordonnées (x_0, b) où $x_0 < 0$ et $b > 0$, et pour vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

1. Exprimer les conditions initiales pour θ , r et $v_r = \dot{r}$ en fonction de x_0 , b et v_0 . On s'aidera d'un schéma. On rappelle que v_r est la coordonnée radiale du vecteur vitesse : $v_r = \vec{v} \cdot \vec{e}_r$.
2. Exprimer la constante des aires $C = (\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z$ en fonction de b et v_0 .
3. Exprimer la force massique $F(r)/m$. On note $\rho = 1141 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ la masse volumique de l'oxygène liquide.

Programmation

- Compléter la fonction **CI(x0,b,v0)** renvoyant une liste [**theta_0,r_0,vr_0**] des conditions initiales.
- Compléter la fonction **bulle(y,t,b,v0)** renvoyant une liste [**dtheta,dr,dvr**] des dérivées temporelles des variables. Le vecteur **y** contient 3 composantes : **y[0]** est l'angle $\theta(t)$, **y[1]** la distance $r(t)$ et **y[2]** est la vitesse radiale $v_r(t) = \dot{r}$.
- Exécuter la cellule suivante : elle détermine la solution numérique pour une vitesse $v_0 = 25 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, une abscisse initiale $x_0 = -100 \text{ d}$ et un paramètre d'impact $b = 15 \text{ mm}$. L'intervalle de temps est choisi afin que la goutte franchisse deux fois la distance qui la sépare de l'aimant, en se maintenant à la vitesse v_0 .
Le graphe apparaît avec la trajectoire.
- Faire varier le paramètre d'impact afin de reproduire les trajectoires obtenues expérimentalement. Essayer d'affiner pour trouver des trajectoires faisant plusieurs fois le tour de l'aimant.
- Dans une nouvelle cellule, écrire le code permettant de calculer la déviation subie en fonction du paramètre d'impact.
- À l'aide d'une boucle, créer deux listes : l'une contenant un ensemble de paramètres d'impact $b \in]0, 20 \text{ mm}]$ et l'autre les déviations α pour ces paramètres d'impact.
- Afficher le graphe de $\alpha(b)$.