

DS 8, Durée 2h, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1

Soient $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0, 2x - y - z = 0 \right\}$.

1. Justifier que P est un sous espace de \mathbb{R}^3 (on admet que D est un sous espace de \mathbb{R}^3).
2. Donner une base de P et une base de D . Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
3. Soit p la projection de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D . Déterminer P_1 la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 . f
4. Soit s la symétrie de \mathbb{R}^3 par rapport à P parallèlement à D . Déterminer S_1 la matrice de s dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2

Partie 1 On considère $n \geq 2$ un entier naturel, u un endomorphisme de \mathbb{R}^n et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée qu'on suppose (du coup comme u) de **rang 1**.

On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

1. Rappeler la définition du rang d'une matrice, la formule du théorème du rang et en déduire la dimension de $\text{Ker}(u)$.
2. Montrer qu'il existe une matrice ligne $L = (1 \ l_2 \ \dots \ l_n) \in \mathcal{M}_{1,n}$ tel que $M = CL$.
3. Montrer que $\text{Tr}(u) = LC$.
Rappel : $\text{Tr}(u)$ désigne la trace de M et donc aussi celle de u .
4. Montrer qu'on a $M^2 = \text{Tr}(M)M$.
5. On suppose ici que $\text{Tr}(M) \neq 0$.
 - (a) Montrer que la matrice $M - \text{Tr}(M)I_n$ n'est pas inversible.
 - (b) En déduire qu'il existe un vecteur v de \mathbb{R}^n non nul tel que $u(v) = \text{Tr}(u)v$.
 - (c) En écrivant la matrice de u dans une base bien choisie de \mathbb{R}^n , en déduire que la matrice M est semblable à la matrice $\text{diag}(\text{Tr}(u), 0, \dots, 0)$.

Partie 2 On désigne a, b, c trois réels non nuls et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

et on suppose que A n'est pas inversible.

6. En considérant le noyau de A , montrer que $ac = b$.
7. Montrer que A est de rang 1.
8. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $A^n \in \text{Vect}(A)$.

Exercice 3

On fixe pour l'exercice $x \in]0, 1[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{k}$$

- (b) Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'on a :

$$S_n - 1 < \int_1^n \frac{dt}{t} < S_n - \frac{1}{n}$$

- (c) Quel encadrement de S_n peut-on en déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$: ?

- (d) Montrer que $S_n \sim \ln(n)$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Dans la question suivante, on souhaite affiner cet équivalent.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = S_n - \ln(n) \quad ; \quad v_n = S_n - \ln(n+1)$$

2. (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes, strictement monotones, à valeurs comprises dans $[0, 1]$.

- (b) En déduire qu'il existe un réel $\gamma \in]0, 1[$ tel que, pour $n \rightarrow \infty$:

$$S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

3. Cette question est indépendante des 2 précédentes.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Calculer $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$.

- (b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

- (d) En déduire la limite pour $n \rightarrow +\infty$ de la suite $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.