

DS 8, Correction rapide.

Exercice 1

Soient $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0 \right\}$ et $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0, 2x - y - z = 0 \right\}$.

Faire comme en TD. On trouve :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = 2P_1 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Partie 1 On considère $n \geq 2$ un entier naturel, u un endomorphisme de \mathbb{R}^n et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée qu'on suppose (du coup comme u) de **rang 1**.

On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

- $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 1$.
- Les colonnes de M sont proportionnelles à C non nulle donc il existe une matrice ligne $L = (1 \ l_2 \ \dots \ l_n) \in \mathcal{M}_{1,n}$ tel que $M = CL$.
- $\text{dTr}(u) = \text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n m_{kk} = LC = \sum_{k=1}^n l_k c_k$.
Rappel : $\text{Tr}(u)$ désigne la trace de M et donc aussi celle de u .
- Avec les formules précédentes : $M^2 = \text{Tr}(M)M$.
- On suppose ici que $\text{Tr}(M) \neq 0$.
 - $M(M - \text{Tr}(M)I_n) = 0$ mais $M \neq 0$ donc la matrice $M - \text{Tr}(M)I_n$ n'est pas inversible.
 - La matrice précédente annule au moins un vecteur de \mathbb{R}^n donc il existe un vecteur v de \mathbb{R}^n non nul tel que $u(v) = \text{Tr}(u)v$.
 - v n'est pas dans le noyau de M . Dans une base du type (v, v_2, \dots, v_n) où (v_2, \dots, v_n) est une base de $\text{Ker}(u)$ la matrice de u M est $\text{diag}(\text{Tr}(u), 0, \dots, 0)$, d'où le résultat.

Partie 2 On designe a, b, c trois réels non nuls et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

et on suppose que A n'est pas inversible.

- Il existe v non nul tel que $A.v = 0$, on en déduit (calcul à faire) que $ac = b$.
- Par suite, les 3 colonnes de A sont proportionnelles : A est de rang 1.

8. Dans ce cas (cf partie 1) $A^2 = 3A$ puis par récurrence : $A^n \in \text{Vect}(A)$.

Exercice 3

On fixe pour l'exercice $x \in]0, 1[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: par décroissance stricte de la fonction $1/x$ sur \mathbb{R}_+^* :

$$\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{k}$$

(b) Soit $n \geq 2$ un entier. En ajoutant les inégalités précédentes, on a :

$$S_n - 1 < \int_1^n \frac{dt}{t} < S_n - \frac{1}{n}$$

(c) Pour $n > 1$:

$$\ln(n) + 1/n < S_n < \ln(n) + 1$$

(d) Par la question précédente : $S_n \sim \ln(n)$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Dans la question suivante, on souhaite affiner cet équivalent.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = S_n - \ln(n) \quad ; \quad v_n = S_n - \ln(n+1)$$

2. (a) On a, avec les question précédentes, pour $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n < u_n \leq 1$$

$$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1) - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = 1/(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} > 0$$

$$u_n - v_n = \ln(1 + 1/n) \rightarrow 0$$

(u_n) et (v_n) sont donc adjacentes, strictement monotones, à valeurs comprises dans $[0, 1]$.

(b) Par le théorème des suites adjacentes : il existe un réel $\gamma \in]0, 1[$ tel que, pour $n \rightarrow \infty$:

$$S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

3. Cette question est indépendante des 2 précédentes.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$.

$$\sum_{k=1}^n t^{k-1} = 1/(1-t) - t^n/(1-t)$$

(b) Par intégration, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

(c)

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$