Fiche 67 : TD du 30-04.

Exercice 1

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série S de terme général $\left(\frac{4(-1)^k}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et du coup à la suite des sommes partielles définie par, si $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4(-1)^k}{2k+1}$$

1. La série S est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série S est convergente.
   Dans la suite, on cherche à déterminer la valeur de sa somme S_∞.
3. On pose, si $x \in [\![0,1]\!]$,
   $$u_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^{2k} \text{ et } v_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k x^{2k}$$
   Montrer que
   $$v_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2} \leq u_n(x)$$
4. Quelle est la valeur de S_∞ somme de la série S ?

Exercice 2

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

1. Démontrer que
   $$u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt.$$
2. Démontrer alors que $\sum u_n$ est convergente.
3. Démontrer que $|u_n| \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $\sum_n u_n$ ne converge pas absolument.

Exercice 3

Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$.
Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

1. Montrer que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)$ est convergente.
2. En déduire que la suite (V_n) est convergente si et seulement si la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
3. Démontrer que
   $$V_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j\geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right).$$
4. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.
5. Quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$?
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$?