Chapitre 19 : Produit scalaire, espaces euclidiens.

Plan

1 Produit scalaire et norme 1

2 Orthogonalité 3

3 Projection orthogonale 5

4 Hyperplans affines d'un espace euclidien 5

5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien 7

6 Matrices orthogonales 7

7 Isométries vectorielles du plan euclidien 8

1 Produit scalaire et norme

On considère un espace vectoriel réel E.

Définition 1 *Un **produit scalaire** sur E est une application :*

$$\begin{cases} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to x.y \end{cases}$$

qui vérifie :

- *le produit scalaire est **bilinéaire** : pour tout vecteurs x, y et z ; λ un scalaire :*

$$(x + \lambda y).z = x.z + \lambda y.z$$
$$x.(y + \lambda z) = x.y + \lambda x.z$$

- ***symétrique*** *: pour tout vecteurs x et y : $x.y = y.x$*
- *pour tout vecteur x non nul : $x.x > 0$.*

Un espace E muni d'un tel produit scalaire est appelé **espace pré-hilbertien**, **espace euclidien** s'il est de dimension finie.

Le produit scalaire est selon les cas noté $x.y$, (x, y) ou $\langle x, y\rangle$.

L'espace canonique $\mathbb{R}^n$ peut être muni du produit scalaire dit canonique :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1.y_1 + \cdots + x_n.y_n$$

On parlera dans ce cas de l'**espace euclidien canonique** $\mathbb{R}^n$.

Sur l'espace des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$: $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a un produit scalaire classique défini par, si f et g sont 2 fonctions de E :

$$(f, g) = \int_a^b f(t).g(t)dt = \int_a^b f.g$$

Il y en a beaucoup d'autres...

On considère E un espace pré-hilbertien ou euclidien muni d'un produit scalaire $\langle x, y\rangle$.

Définition 2 *L'application*

$$\| \ \| \begin{cases} E \to \mathbb{R}+ \\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{cases}$$

*est la **norme** associée au produit scalaire choisi.*

*On pose si v, w sont dans E : $d(v, w) = \|v - w\|$ la **distance** entre les vecteurs v et w.*

On a les propriétés élémentaires :

- Si x est dans E : $\|x\| = 0 \implies x = 0$;
- Pour $x \in E$ et λ réel : $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$.

Le produit scalaire peut être retrouvé par la norme et la :

Propriété 1 (Formule de polarisation) *Si x et y sont dans E :*

$$2\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

Plus fondamental :

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy Schwarz) *Pour tous vecteurs x et y dans E :*

$$-\|x\|.\|y\| \leq \langle x, y\rangle \leq \|x\|.\|y\|$$

avec, si y est non nul :

- *égalité à droite si et seulement si il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$,*
- *égalité à gauche si et seulement si il existe $\lambda \leq 0$ tel que $x = \lambda y$.*

Pour tous vecteurs x et y dans E :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Et surtout :

Théorème 2 (Inégalité triangulaire) *Pour tous vecteurs x et y dans E :*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec si y est non nul égalité si et seulement si il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$.

2 Orthogonalité

On considère un espace pré-hilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $\langle x, y\rangle$.

Définition 3 *Les vecteurs x et y sont dit* ***orthogonaux*** *quand $\langle x, y\rangle = 0$. On note dans ce cas $x \perp y$.*

On a le fameux :

Théorème 3 (Théorème de Pythagore) *On a pour tout x et y dans E :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \text{ si et seulement si } x \perp y$$

Définition 4 *Si X est une partie de E, son* ***orthogonal*** *noté $X^\perp$ est :*

$$X^\perp = \{y \in E \ / \ \forall x \in X : x \perp y\}$$

$X^\perp$ est un sous espace vectoriel de E.

On considère une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E.

Définition 5 *La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **orthogonale** quand pour tout $i \neq j$ dans I :*

$$x_i \perp x_j$$

***orthonormale** ou **orthonormée** quand, de plus, pour tout i dans I :*

$$\|x_i\| = 1$$

Remarquons qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls ou une famille orthonormale de vecteurs non nuls est libre.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Partant d'une famille libre, on peut construire une famille orthonormale par :

Théorème 4 (Orthonormalisation de Schmitt) *Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$. On peut même avoir :*

$$\mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}(v_1), \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2), \ldots, \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$$

On procède comme suit :

- On pose $e_1 = v_1$
- On pose $e_2 = v_2 - \lambda_{1,2} e_1$ de sorte que $e_2.e_1 = 0$.
- On pose $e_3 = v_3 - \lambda_{1,3} e_1 - \lambda_{2,3} e_2$ de sorte que $e_3.e_1 = 0$ et $e_3.e_2 = 0$
- et ainsi de suite jusqu'à $e_n = v_n - \lambda_{1,n} e_1 - \cdots - \lambda_{n-1,n} e_{n-1}$ de sorte que $e_n.e_1 = 0, \ldots, e_n.e_{n-1} = 0$.

On construit ainsi une famille orthogonale de vecteurs non nuls. En divisant chacun de ces vecteurs par sa norme, on construit la famille cherchée.

On obtient finalement :

Théorème 5 *Tout espace euclidien admet une base orthonormée, toute famille orthonormale dans un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.*

On considère du coup un espace euclidien E muni d'une base orthonormée $B = (e_1, \ldots, e_n)$.

Propriété 2 *Dans les conditions précédentes, si v est un vecteur de E alors :*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle e_i \qquad \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle^2$$

Si dans la base B : $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ alors :

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle . \langle w, e_i \rangle$$

3 Projection orthogonale

On considère E un espace (non nécessairement de dimension finie) réel muni d'un produit scalaire $\langle \quad \rangle$.

Théorème 6 (Projection sur un sous espace de dimension finie) *Si F est un sous espace de dimension finie, il existe une projection orthogonale de E sur F. Autrement dit, il existe un projecteur p linéaire de E d'image F, de noyau $F^\perp$.*

En particulier :

$$E = F \oplus F^\perp$$

et pour tout vecteur v de E, on a, en posant $p^\perp(v) = v - p(v)$:

$$v = p(v) + p^\perp(v) \qquad \text{avec } p(v) \in F \quad , \quad p^\perp(v) \in F^\perp \text{ et donc } p(v) \perp p^\perp(v)$$

Soit maintenant $B = (e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormée de F.

Propriété 3 *Dans les conditions précédentes, si $v \in E$:*

$$p(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, e_i \rangle e_i$$

$p(v)$ est l'unique vecteur de F qui minimise la distance entre F et v. En particulier :

$$d(v, p(v)) = \|v - p(v)\| = \mathrm{Min}_{w \in F}\, d(v, w) = d(v, F)$$

Si E est de plus un espace euclidien (c'est à dire de dimension finie) et F est un sous espace de E :

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$$

4 Hyperplans affines d'un espace euclidien

On considère ici un espace euclidien de dimension n.

Rappelons qu'un **hyperplan affine** H est un sous espace affine de E de dimension $n-1$. Il peut être défini comme passant par un point A et dirigé par l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1})$ où $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de E.

Propriété 4 *Si H est un hyperplan affine de E, il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$, un point A de E, un scalaire λ (non uniques) tels que l'équation de H peut s'écrire*

$$M \in H \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \lambda$$

Dans les condition précédentes, $\overrightarrow{n}^{\perp} = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$ et on dit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur **normal** à H.

Réciproquement :

Propriété 5 *Si un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$, un scalaire λ et un point A sont donnés, l'ensemble des points M de E vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \lambda$ est un hyperplan affine de E de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.*

Plus concrètement, si on travaille dans un repère orthonormé fixé de E et si H est un hyperplan affine de E, alors l'équation de H peut s'écrire :

$$M = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in H \iff a_1.x_1 + \dots + a_n.x_n = k$$

$a_1, \dots, a_n$ non tous nuls. Dans ce cas le vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à H.

Ainsi une droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = c$ a pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = d$ a pour vecteur normal le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Reprenons H un hyperplan affine de E euclidien, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal unitaire à H et A un point de H.

Propriété 6 *Si M est un point de E alors la distance entre M et H est donné par la formule :*

$$d(M, H) = |\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|$$

Plus concrètement dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ euclidiens canoniques.

Si Δ est la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax + by = c$ et si M est le point : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ alors

$$d(M, \Delta) = \frac{|a.x_0 + b.y_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si P est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = d$ et si M est le point : $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ alors

$$d(M, P) = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

On considère un espace euclidien E.

Définition 6 *Une **isométrie vectorielle**est un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout vecteur v de E :*

$$\|u(v)\| = \|v\|$$

De manière équivalente, un endomorphisme u de E est une isométrie vectorielle si et seulement si, pour tous v et w dans E :

$$u(v).u(w) = v.w$$

Ou encore, u endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si, pour une ou toute base orthonormée $(e_1, \ldots e_n)$, la famille $(u(e_1), \ldots u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

On peut montrer qu'une application de E dans E vérifiant pour tout vecteur v de E : $\|u(v)\| = \|v\|$ est nécessairement linéaire.

Propriété 7 *L'ensemble noté $O(E)$ des isométries vectorielles de E est un sous groupe du groupe linéaire $GL(E)$ appelé **groupe orthogonal** de E.*

Quelques exemples importants :

Propriété 8 *Si F est un sous espace de E la symétrie par rapport à E parallèlement à $F^\perp$ dite **réflexion** par rapport à F est une isométrie de E.*

*Si H est un hyperplan de E la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$ dite **réflexion** par rapport à H est une isométrie de E.*

6 Matrices orthogonales

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

Définition 7 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** quand les conditions équivalentes suivantes sont réalisées :*

- *Les colonnes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.*
- *Les lignes de A forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.*
- *On a ${}^tA.A = I_n$.*
- *A est inversible et $A^{-1} =^t A$.*
- *A est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$.*

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $O(n)$ est le **groupe orthogonal** d'ordre n, c'est un sous groupe (en général non commutatif) de $GL(n, \mathbb{R})$. Le lien avec les isométries est donné par :

Propriété 9 *Si E est un espace euclidien et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si $\mathrm{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.*

7 Isométries vectorielles du plan euclidien

On considère le plan euclidien orienté canonique $\mathbb{R}^2$.

Une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale **positive** est la matrice d'une base orthonormée **directe** de $\mathbb{R}^2$ et donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On note $SO(2)$ l'ensemble des telles matrices. $SO(2)$ est un sous groupe de $O(2)$.

Une matrice A de $SO(2)$ est aussi la matrice de la **rotation d'angle** θ R_θ de $\mathbb{R}^2$. On dit du coup que θ est une **mesure de l'angle orienté** entre les 2 vecteurs non nul $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ quand :

$$R_\theta\left(\frac{\overrightarrow{u}}{\|u\|}\right) = \frac{\overrightarrow{v}}{\|v\|}$$

Rappelons que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1. On considère l'application :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} & \to & SO(2) \\ \theta & \to & z = e^{i\theta} & \to & A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Propriété 10 *L'application précédente est une bijection entre $\mathbb{U}$ et $SO(2)$ qui vérifie de plus si θ et θ' sont dans $\mathbb{R}$: $A(\theta + \theta') = A(\theta).A(\theta')$*

On peut ainsi retrouver (entre autres) les formules d'addition par la relation : $A(e^{i(\theta+\theta')}) = A(e^{i\theta}).A(e^{i\theta'})$.

En particulier, le groupe $SO(2)$ est commutatif. Attention, ce n'est pas le cas de $SO(3)$ ni des groupes suivants !

Concernant les isométries négatives de $\mathbb{R}^2$, on obtient de même :

Une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale **négative** est la matrice d'une base orthonormée **indirecte** de $\mathbb{R}^2$ et donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Une telle matrice A est aussi la matrice de la réflexion S_θ de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite vectorielle D_θ faisant un angle orienté $\frac{\theta}{2}$ par rapport à la 1/2 droite $[Ox)$.

En conclusion pour $\mathbb{R}^2$:

Propriété 11 *Les isométries vectorielles de* $\mathbb{R}^2$ *sont les rotations vectorielles et les réflexions par rapport aux droites vectorielles de* $\mathbb{R}^2$.

Savoirs

Définition d'un produit scalaire, d'une norme. Propriétés élémentaires. Inégalité de Cauchy Schwarz. Théorème de Pythagore

Savoir-faire

Orthonormalisation de Schmitt. Calcul d'une projection orthogonale, d'une décomposition dans une base orthogonale, orthonormale.