Théorie des mécanismes

N. Mesnier
Lycée international Jean Perrin, Lyon

2025–2026

Contexte & objectifs

Contexte

- les mécanismes sont au cœur des systèmes mécaniques ;
- ils permettent de réaliser différentes transformations de mouvement ;
- leur modélisation est indispensable à leur dimensionnement, leur conception et plus généralement leur étude.

Objectifs du cours

- déterminer des liaisons équivalentes pour simplifier le graphe de structure d'un mécanisme ;
- analyser la rigidité des solutions technique ;
- choisir un modèle de solution isostatique ne demandant pas de contraintes géométriques fortes (ou permettant une analyse statique).

Plan du cours

1 2 3 4 5

Introduction

Notations

- Torseur cinématique

entre deux classes d'équivalence 1 et 2 :

$$\{\mathscr{V}_{2/1}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} p_{21}\ \overrightarrow{x} + q_{21}\ \overrightarrow{y} + r_{21}\ \overrightarrow{z} \\ u_{21}\ \overrightarrow{x} + v_{21}\ \overrightarrow{y} + w_{21}\ \overrightarrow{z} \end{array}\right\}$$

- Torseur des actions mécaniques transmissibles

par la même liaison :

$$\{\mathscr{T}_{1\to 2}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} X_{12}\ \overrightarrow{x} + Y_{12}\ \overrightarrow{y} + Z_{12}\ \overrightarrow{z} \\ L_{12}\ \overrightarrow{x} + M_{12}\ \overrightarrow{y} + N_{12}\ \overrightarrow{z} \end{array}\right\}$$

- Puissance des inter-efforts de liaison :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathscr{T}_{1\to 2}\}\otimes\{\mathscr{V}_{2/1}\} = X_{12}u_{21}+Y_{12}v_{21}+Z_{12}w_{21}+L_{12}p_{21}+M_{12}q_{21}+N_{12}r_{21}$$

- Hypothèse fondamentale

Les modèles de théorie des mécanismes
ne considèrent que des
liaisons parfaites.

Définition (Liaison parfaite)

Une liaison est dite parfaite si elle est sans jeu, sans frottement et indéformable.

- Conséquence

La puissance des inter-efforts de toute liaison sera toujours nulle :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \left\{\mathscr{T}_{1\rightarrow 2}\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} = 0$$

Structure d'espace vectoriel

Un torseur « vit » dans un espace qui a la structure d'un espace vectoriel de dimension 6 avec des opérations d'addition et de multiplication (par un scalaire et co-moment) bien définies.

- $\mathcal{V}_{12}$: sous-espace vectoriel engendré par $\left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\}$
  - dimension égale au nombre de degrés de liberté de la liaison
  - vérifie $\dim(\mathcal{V}_{12}) \leqslant 5$ (6 si aucune liaison)
- $\mathcal{T}_{12}$: sous-espace vectoriel engendré par $\{\mathscr{T}_{1\to 2}\}$
  - dimension égale au nombre d'inconnues d'AM transmissibles
  - vérifie $\dim(\mathcal{T}_{12}) \leqslant 5$ (6 si encastrement)

Le co-moment $\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathscr{T}_{1\to 2}\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\}$ définit un produit scalaire

- nul si les deux sous-espaces vectoriels $\mathcal{V}_{12}$ et $\mathcal{T}_{12}$ sont **orthogonaux** ;
- défini la notion de **dualité** des torseurs cinématiques et d'AM transmissibles

$$\dim(\mathcal{V}_{12}) + \dim(\mathcal{T}_{12}) = 6$$

Dualité

Si la puissance des inter-efforts de toute liaison est nulle :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \left\{\mathscr{T}_{1\rightarrow 2}\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} = 0$$

alors $\mathcal{T}_{12}$ (resp. $\mathcal{V}_{12}$) est le sous-espace vectoriel dual-orthogonal à $\mathcal{V}_{12}$ (resp. $\mathcal{T}_{12}$)

$$\dim(\mathcal{V}_{12}) + \dim(\mathcal{T}_{12}) = 6$$

Conséquence pratique

Si une liaison $\mathscr{L}_{12}$ possède

$$\dim(\mathcal{V}_{12}) = m$$

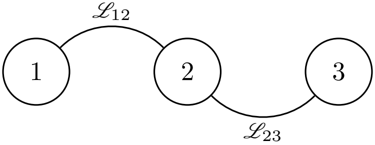
degrés de liberté
alors elle possédera

$$\dim(\mathcal{T}_{12}) = 6 - m$$

inconnues d'actions mécaniques transmissibles.

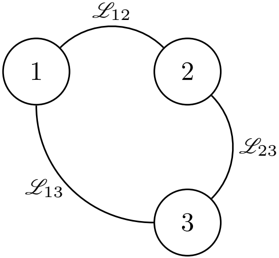
Structure des chaînes de solides

- Chaîne ouverte



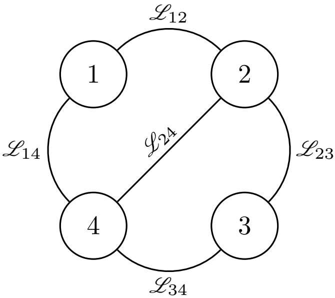
Structure des chaînes de solides

- Chaîne fermée

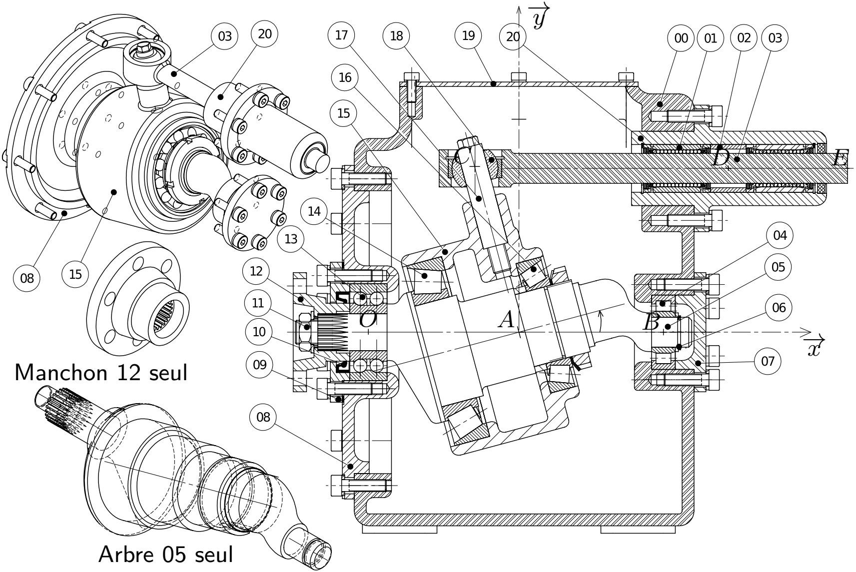


Structure des chaînes de solides

- Chaîne complexe

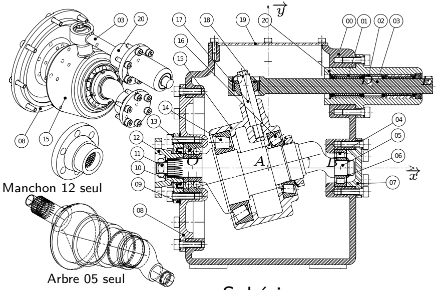


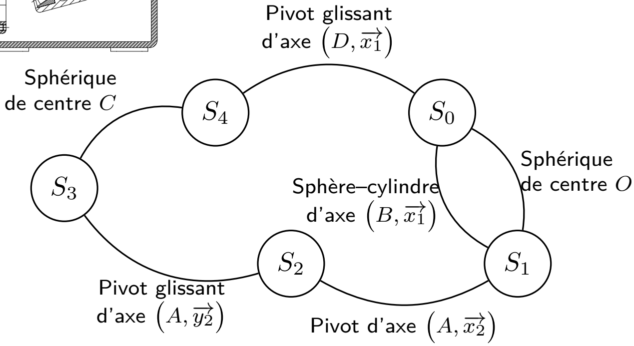
Exemple d'application
Système d'encapsulation



Exemple d'application

Système d'encapsulation





1 2 3 4 5

Liaisons équivalentes

Liaisons équivalentes

Définition (Liaison équivalente)

Une liaison $\mathscr{L}_{\text{éq}}$ sera dite équivalente à un ensemble de liaisons si :

- elle transmet les mêmes actions mécaniques que les liaisons du modèle initial ;
- elle transmet les mêmes mouvements que les liaisons du modèle initial ;
- elle a le même bilan énergétique que les liaisons du modèle initial.

- 2 cas :
  - liaisons en série ;
  - liaisons en parallèle.
- 2 approches :
  - torseur cinématique équivalent (approche cinématique)
  - torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente (approche statique)

Liaisons équivalentes

Définition (Liaison équivalente)

Une liaison $\mathscr{L}_{\text{éq}}$ sera dite équivalente à un ensemble de liaisons si :

- elle transmet les mêmes actions mécaniques que les liaisons du modèle initial ;
- elle transmet les mêmes mouvements que les liaisons du modèle initial ;
- elle a le même bilan énergétique que les liaisons du modèle initial.

- 2 cas :
  - liaisons en série ;
  - liaisons en parallèle.
- 2 approches :
  - torseur cinématique équivalent (approche cinématique)
  - torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente (approche statique)

Liaisons équivalentes

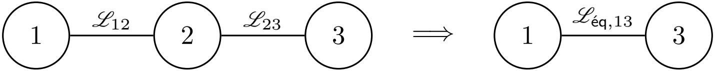
Définition (Liaison équivalente)

Une liaison $\mathscr{L}_{\text{éq}}$ sera dite équivalente à un ensemble de liaisons si :

- elle transmet les mêmes actions mécaniques que les liaisons du modèle initial ;
- elle transmet les mêmes mouvements que les liaisons du modèle initial ;
- elle a le même bilan énergétique que les liaisons du modèle initial.

- 2 cas :
  - liaisons en série ;
  - liaisons en parallèle.
- 2 approches :
  - torseur cinématique équivalent (approche cinématique)
  - torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison équivalente (approche statique)

- Approche cinématique

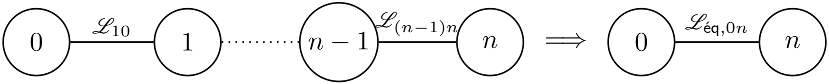


$\mathscr{L}_{\text{éq},13}$: liaison équivalente à l'ensemble des deux liaisons en série $\{\mathscr{L}_{12} \cup \mathscr{L}_{23}\}$

$$\{\mathscr{V}_{\text{éq},13}\} = \{\mathscr{V}_{12}\} + \{\mathscr{V}_{23}\}$$

Liaisons en séries

- Approche cinématique



$$\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathscr{V}_{i/(i-1)}\right\}$$

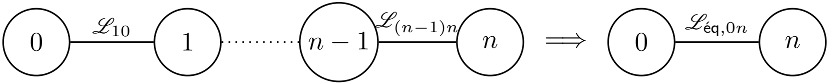
La dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\}$ est égale au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente, dont on sait, grâce à la formule de Grassmann, qu'elle vérifie :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{\text{éq},0n}) \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

m_u : nombre de mobilités utiles
m : nombre de mobilités totales
$m_i = m - m_u$: nombre de mobilités internes

Liaisons en séries

- Approche cinématique



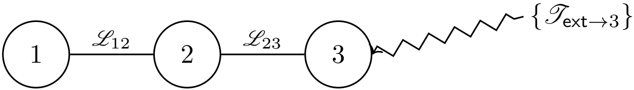
$$\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{\mathscr{V}_{i/(i-1)}\right\}$$

La dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\left\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\right\}$ est égale au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente, dont on sait, grâce à la formule de Grassmann, qu'elle vérifie :

$$m_u = \dim(\mathcal{V}_{\text{éq},0n}) \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

m_u : nombre de mobilités utiles
m : nombre de mobilités totales
$m_i = m - m_u$: nombre de mobilités internes

- Approche statique



1. On isole le solide 3 :

$$\{\mathscr{T}_{2\to 3}\} + \{\mathscr{T}_{\text{ext}\to 3}\} = \{0\}$$

2. On isole le système $\{2; 3\}$:

$$\{\mathscr{T}_{1\to 2}\} + \{\mathscr{T}_{\text{ext}\to 3}\} = \{0\}$$

3. On isole le solide 3 en considérant la liaison équivalente :

$$\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\to 3}\} + \{\mathscr{T}_{\text{ext}\to 3}\} = \{0\}$$

Liaisons en séries

Approche statique (suite)

Par substitution on obtient :

$$\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\rightarrow 3}\} = \{\mathscr{T}_{1\rightarrow 2}\} = \{\mathscr{T}_{2\rightarrow 3}\}$$

Cette condition s'interprète comme une **compatibilité en effort** :

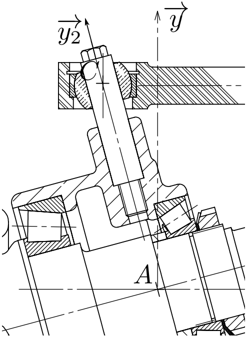
Les composantes du torseur des actions mécaniques transmissibles équivalent sont seulement celles qui peuvent être transmises simultanément par toutes les liaisons.

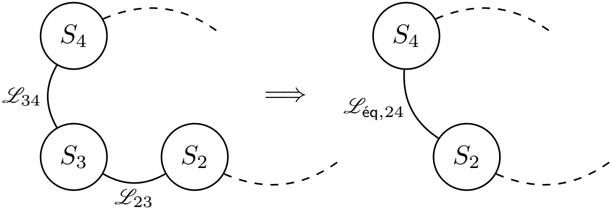
Elle s'écrit pour n liaisons en série :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \{\mathscr{T}_{\text{éq},0\rightarrow n}\} = \{\mathscr{T}_{(i-1)\rightarrow i}\}$$

Liaisons en séries

Application au système d'encapsulation

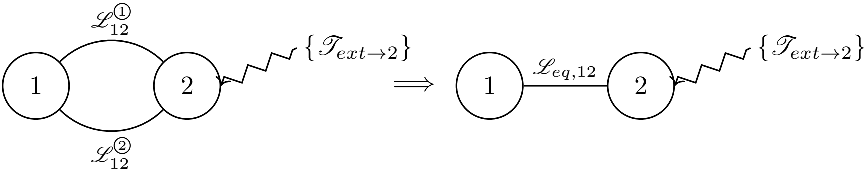




Liaison équivalente à l'association en série de $\mathscr{L}_{23}$ = liaison pivot glissant d'axe $(A, \overrightarrow{y_2})$ et $\mathscr{L}_{34}$ = liaison sphérique de centre C ?

Liaisons en parallèle

- Approche statique



On isole le solide 2 :

$$\{\mathscr{T}_{1\rightarrow 2}^{①}\} + \{\mathscr{T}_{1\rightarrow 2}^{②}\} + \{\mathscr{T}_{ext\rightarrow 2}\} = \{0\}$$

On isole le solide 2 en tenant compte de la liaison équivalente :

$$\{\mathscr{T}_{\mathsf{eq},1\rightarrow 2}\} + \{\mathscr{T}_{ext\rightarrow 2}\} = \{0\}$$

En exploitant les deux relations précédentes, on démontre que :

$$\{\mathscr{T}_{\mathsf{eq},1\rightarrow 2}\} = \{\mathscr{T}_{1\rightarrow 2}^{①}\} + \{\mathscr{T}_{1\rightarrow 2}^{②}\}$$

Approche statique (cas général)

Pour n liaisons en parallèle on a alors :

$$\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\rightarrow2}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathscr{T}_{1\rightarrow2}^{(i)}\}$$

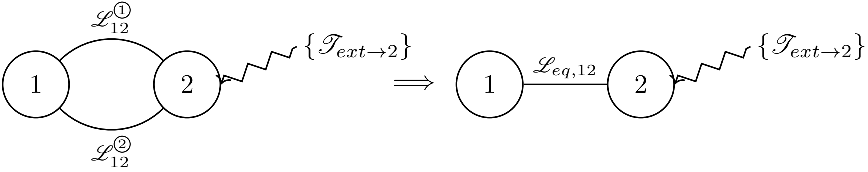
Le sous-espace vectoriel réel engendré par le torseur des actions mécaniques transmissibles $\{\mathscr{T}_{\text{éq},1\rightarrow2}\}$ de la liaison équivalente $\mathscr{L}_{\text{éq},12}$ soit la somme des n sous-espaces vectoriels engendrés par les torseurs des actions mécaniques transmissibles des n liaisons en parallèle $\mathscr{L}_{12}^{(i)}$.
La différence entre la dimension de la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par chacune des liaisons et la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\{\mathscr{T}_{\text{éq},12}\}$ définit le **degré d'hyperstatisme** de la liaison :

$$h = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathcal{T}_{12}^{(i)}) - \dim(\mathcal{T}_{\text{éq},12})$$

Ce degré correspond au nombre d'inconnues de liaison qui ne peuvent pas être déterminées par une simple étude statique.

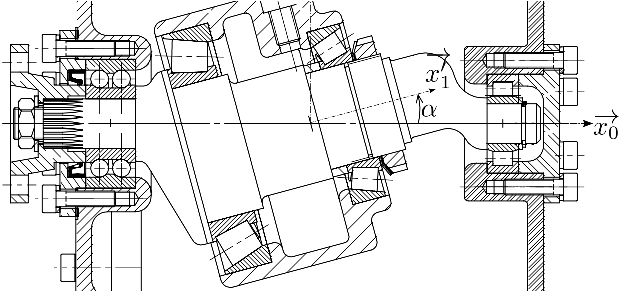
Liaisons en parallèle

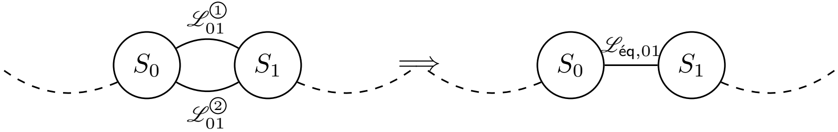
- Approche cinématique



Les mobilités de la liaison équivalente doivent être compatibles avec toutes les mobilités des liaisons élémentaires :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \{\mathscr{V}_{\text{éq},2/1}\} = \{\mathscr{V}_{2/1}^{ⓘ}\}$$





Liaison équivalente à l'association en parallèle de $\mathscr{L}_{01}^{①}$ = liaison sphérique de centre O de $\mathscr{L}_{01}^{②}$ = liaison sphère-cylindre d'axe $(B, \overrightarrow{x_0})$?

Liaisons équivalentes

- Bilan

	Liaisons en série	Liaisons en parallèle
Approche cinématique	$\{\mathscr{V}_{\text{éq},n/0}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathscr{V}_{i/(i-1)}\}$	$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \{\mathscr{V}_{\text{éq},1/0}\} = \{\mathscr{V}^{ⓘ}_{1/0}\}$
Approche statique	$\forall i \in [\![1,n]\!],$ $\{\mathscr{T}_{\text{éq},0\to n}\} = \{\mathscr{T}_{(i-1)\to i}\}$	$\{\mathscr{T}_{\text{éq},0\to 1}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathscr{T}^{ⓘ}_{0\to 1}\}$

1 2 3 4 5

Degré de mobilité m d'un mécanisme

Degré de mobilité m d'un mécanisme

- Graphe de structure
  - n liaisons de $m_k \leqslant 5$ inconnues cinématiques (degrés de liberté) ;
  - γ cycles indépendants ;

Définition (Degré de mobilité)

Le degré de mobilité d'un mécanisme correspond au nombre entier $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m = I_C - r_C$$

avec :

- $I_C = \sum_{k=1}^{n} m_k$ le nombre d'inconnues cinématiques d'un mécanisme ;
- r_C le rang du système de $E_C = 6\gamma$ équations issu de l'étude cinématique du mécanisme (fermeture cinématique).

Le degré de mobilité d'un mécanisme vérifie toujours $m \geqslant I_C - E_C$.

Degré de mobilité m d'un mécanisme

Degré de mobilité

$$m = I_C - r_C \geqslant I_C - E_C$$

- $m =$ nombre d'inconnues cinématiques que l'on ne peut pas déterminer lors de la résolution de du système homogène de $E_C = 6\gamma$ équations linéaires à I_C inconnues.
- $m =$ nombre de paramètres cinématiques à imposer afin d'obtenir une solution unique pour le système de $E_C = 6\gamma$ équations linéaires de rang r_C ;
- $m = 0 \iff$ le mécanisme est *immobile*.

Calcul du degré de mobilité

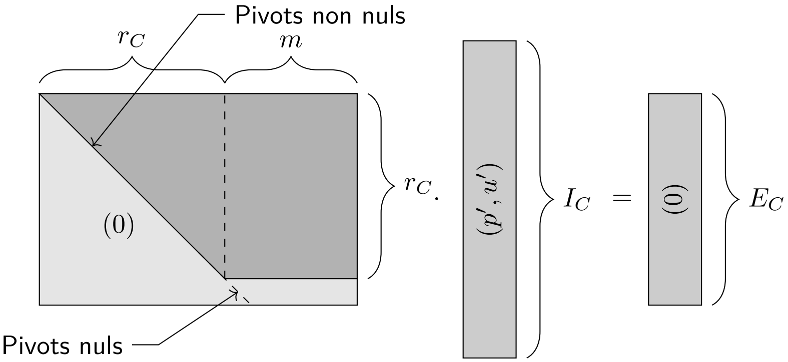
1. effectuer γ fermetures cinématiques et écrire les 6γ équations scalaires faisant intervenir les I_C inconnues cinématiques ;
2. mettre ces équations sous la forme d'un système linéaire :

$$E_C = 6\gamma \left\{ \underbrace{\boxed{\quad A \quad}}_{I_C} \right. \cdot \left. \boxed{(p,u)} \right\} I_C = \left. \boxed{(0)} \right\} E_C$$

avec $A \in \mathcal{M}_{6\gamma, I_C}(\mathbb{R})$.

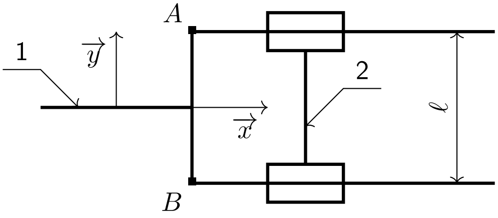
Calcul du degré de mobilité

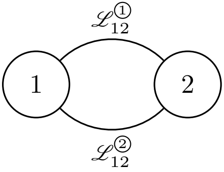
3. mettre ce système linéaire sous forme échelonnée par lignes en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan :



$$r_C = \mathrm{rg}(A)$$

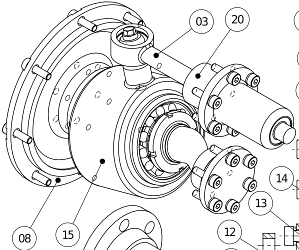
Exemple : 2 liaisons pivot glissant d'axes parallèles

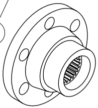




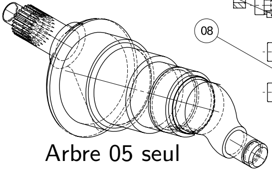
$$\left\{\mathscr{V}_{2/1}^{①}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{cc} p_{21}^{①} & \overrightarrow{x} \\ u_{21}^{①} & \overrightarrow{x} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\mathscr{V}_{2/1}^{②}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{cc} p_{21}^{②} & \overrightarrow{x} \\ u_{21}^{②} & \overrightarrow{x} \end{array}\right\}$$

Degré de mobilité m du mécanisme ?

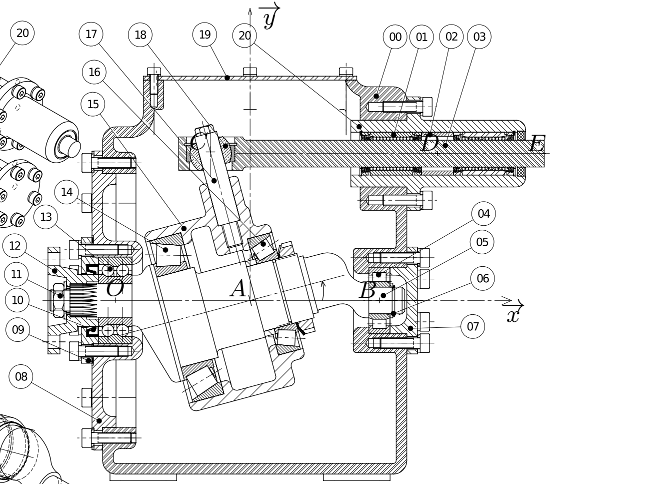




Manchon 12 seul



Arbre 05 seul



détails du calul

Mobilités utiles et mobilités internes

Degré de mobilité (total) d'un mécanisme :

$$m = m_u + m_i$$

- m_u = **mobilités utiles**
  nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques d'entrée(s)/sortie(s) du mécanisme ;
- m_i = **mobilités internes**
  nombre de relations indépendantes entre les inconnues cinématiques des pièces internes au mécanisme. Ces mouvements sont indépendants du fonctionnement global du système.

Mobilités utiles et mobilités internes

Identification pratique

À partir de l'analyse du mécanisme
(lecture du dessin d'ensemble, schéma cinématique, vue 3D, etc.)

- **Mobilités utiles**
  - identifier la chaîne cinématique de la (des) mobilité(s) utile(s) (de(s) l'actionneur(s) vers la sortie) ;
  - rechercher la chaîne cinématique de réglage.
- **Mobilités internes**
  - regarder autour des liaisons à plusieurs degrés de liberté
    (pivot glissant, sphère–cylindre, sphérique)

ℹ Approche intuitive
limitée aux mécanismes peu complexes

Mobilités utiles et mobilités internes

Identification pratique

À partir de l'analyse du mécanisme
(lecture du dessin d'ensemble, schéma cinématique, vue 3D, etc.)

- **Mobilités utiles**
  - identifier la chaîne cinématique de la (des) mobilité(s) utile(s) (de(s) l'actionneur(s) vers la sortie) ;
  - rechercher la chaîne cinématique de réglage.
- **Mobilités internes**
  - regarder autour des liaisons à plusieurs degrés de liberté
    (pivot glissant, sphère–cylindre, sphérique)

Approche intuitive
limitée aux mécanismes peu complexes

Mobilités utiles et mobilités internes

Cas particulier des chaînes ouvertes

- **Mobilités totales**

$$m = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{dim}(\mathcal{V}_{i/(i-1)})$$

somme des mobilités des n liaisons en série

- **Mobilités utiles**

$$m_u = \mathrm{dim}(\mathcal{V}_{\text{éq},0n})$$

mobilités de la liaison équivalente aux n liaisons en série

- **Mobilités internes**

$$m_i = m - m_u$$

déduit.

1 2 3 4 5

Degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme

Degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme

- Graphe de structure
  - S solides (dont le bâti) ;
  - n liaisons de $p_k \leqslant 5$ inconnues d'actions mécaniques transmissibles ;
  - γ cycles indépendants ;

Définition (Degré d'hyperstatisme)

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme correspond au nombre entier $h \in \mathbb{N}$ tel que :

$$h = I_S - r_S$$

avec :

- $I_S = \sum_{k=1}^{n} p_k$ le nombre d'inconnues d'actions transmissibles par les liaisons d'un mécanisme ;
- r_S le rang du système de $E_S = 6(S-1)$ équations issu de l'étude dynamique (ou statique) de chacun des $(S-1)$ solides (hors bâti).

Le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme vérifie toujours $h \geqslant I_S - E_S$.

Degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme

Degré d'hyperstatisme

$$h = I_S - r_S \geqslant I_S - E_S$$

- $h =$ nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles que l'on ne peut pas déterminer lors de la résolution de du système homogène de $E_S = 6\,(S-1)$ équations linéaires à I_S inconnues.
- $h =$ nombre de paramètres d'AM transmissibles à imposer afin d'obtenir une solution unique pour le système de $E_S = 6\,(S-1)$ équations linéaires de rang r_S ;
- $h = 0 \iff$ le mécanisme est *isostatique*.

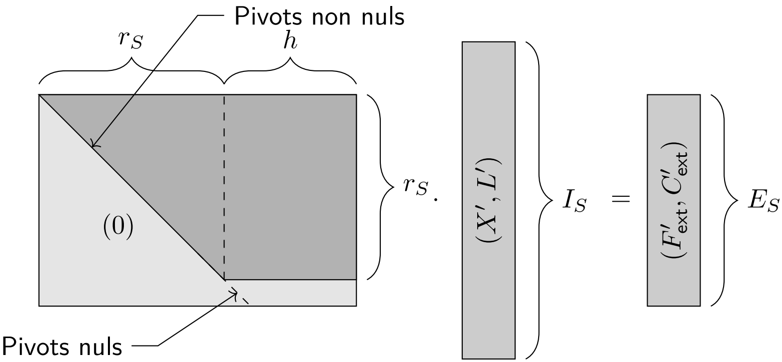
1. effectuer $(S-1)$ études dynamiques (ou statiques) indépendantes et écrire les $6(S-1)$ équations scalaires faisant intervenir les I_S inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ;
2. mettre ces équations sous la forme d'un système linéaire :

$$E_S = 6(S-1)\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix}}_{I_S}\right. \cdot \left.\begin{bmatrix} (X, L) \end{bmatrix}\right\} I_S \quad = \quad \left.\begin{bmatrix} (F_{\text{ext}}, C_{\text{ext}}) \end{bmatrix}\right\} E_S$$

avec $A \in \mathcal{M}_{6(S-1), I_S}(\mathbb{R})$.

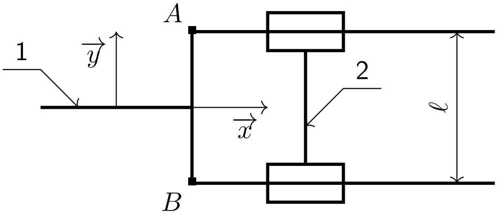
Calcul du degré d'hyperstatisme

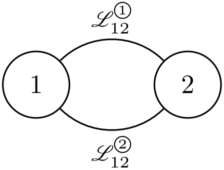
3. mettre ce système linéaire sous forme échelonnée par lignes en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss–Jordan :



$$r_S = \text{rg}(A)$$

Exemple : 2 liaisons pivot glissant d'axes parallèles

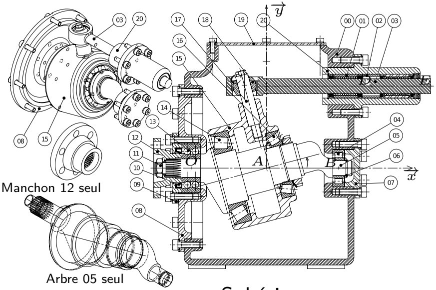




$$\left\{\mathscr{T}^{①}_{1\to 2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} Y_{12}^{①}\ \overrightarrow{y} + Z_{12}^{①}\ \overrightarrow{z} \\ M_{12}^{①}\ \overrightarrow{y} + N_{12}^{①}\ \overrightarrow{z} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\mathscr{T}^{②}_{1\to 2}\right\} = {}_B\left\{\begin{array}{c} Y_{12}^{②}\ \overrightarrow{y} + Z_{12}^{②}\ \overrightarrow{z} \\ M_{12}^{②}\ \overrightarrow{y} + N_{12}^{②}\ \overrightarrow{z} \end{array}\right\}$$

Degré d'hyperstatisme h du mécanisme ?

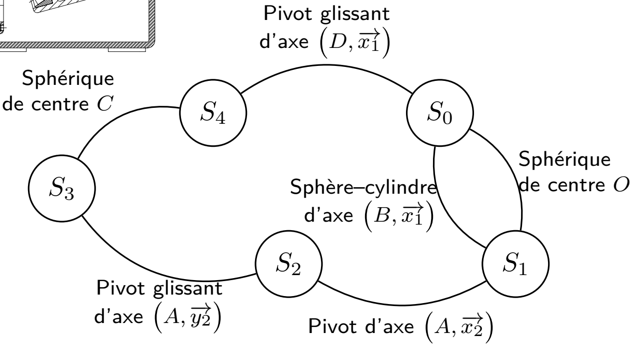
Exemple : système d'encapsulation



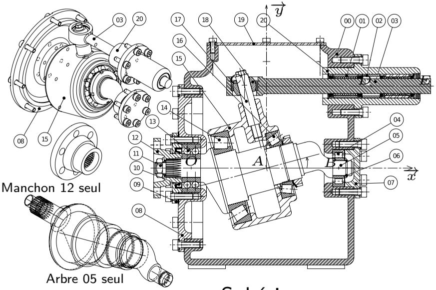
$S = 5 \;\Rightarrow\; E_S = 24$

$I_S = 21$

$\Rightarrow\; h \geqslant 21 - 24 = -3$



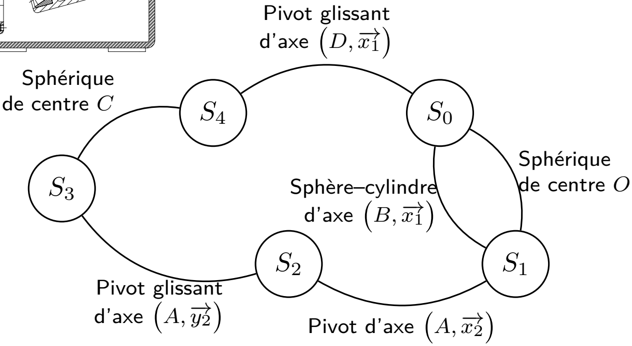
Exemple : système d'encapsulation



$$S = 5 \;\Rightarrow\; E_S = 24$$

$$I_S = 21$$

$$\Rightarrow\; h \geqslant 21 - 24 = -3$$



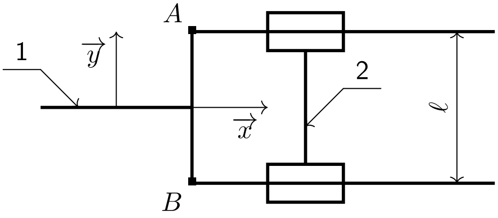
- Implication technologique

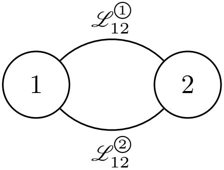
Hyperstatisme $\Rightarrow$ Rigidité

Hyperstatisme $\Rightarrow$ Contraintes géométriques

Hyperstatisme $\Rightarrow$ Réglage

Exemple : 2 liaisons pivot glissant d'axes parallèles





$m = 1$ et $h = 3$

3 réglages ?
Changements de liaisons pour rendre le mécanisme isostatique ?

Hyperstatisme et contraintes géométriques

Contrainte géométrique	*Éléments*	*Paramètres*
Parallélisme	droite/droite	2 angles
	droite/plan	1 angle
	plan/plan	2 angles
Perpendicularité	droite/droite (non coplanaires)	1 angle et 1 longueur
	droite/droite (coplanaires)	1 angle
	plan/plan	1 angle
Coaxialité	droite/droite	2 angles et 2 longueurs
Localisation	point/point	3 longueurs
Symétrie	plan/plan	1 angle et 1 longueur
Inclinaison	droite/droite	1 angle et 1 longueur
	droite/plan	2 angles

1 2 3 4 5

Formulation globale

Relation fondamentale

Objectif

Établir un lien entre le degré de mobilités m d'un mécanisme et son degré d'hyperstatisme h.

Considérons un mécanisme constitué de S solides (dont le bâti) et L liaisons tels que le graphe de structure contienne $\gamma = L - S + 1$ cycles indépendants.

Théorème

La relation fondamentale de la théorie des mécanismes est donnée par la relation d'équivalence :

$$h - m = E_C - I_C = I_S - E_S$$

liant les degrés d'hyperstatisme h et de mobilité m d'un mécanisme à ses caractéristiques cinématiques (I_C inconnues et $E_C = 6\gamma$ équations) ou dynamiques (I_S inconnues et $E_S = 6(S-1)$ équations).

Relation fondamentale

$$h - m = E_C - I_C = I_S - E_S$$

basée sur l'analyse conjointe (**dualité**) des deux systèmes d'équations, respectivement issus d'une analyse cinématique et d'une analyse statique ou dynamique.

Lien entre les 2 approches

Nombre de liaisons :

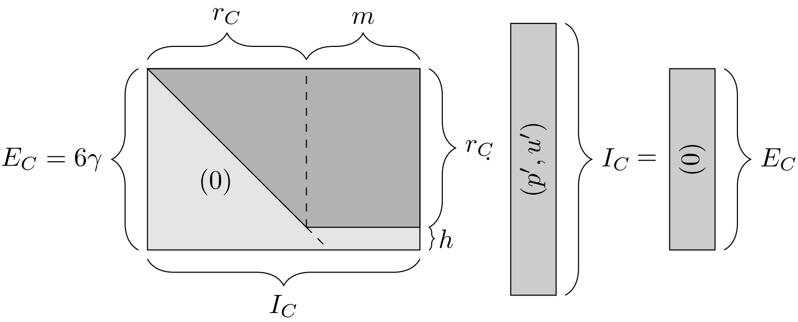
$$6L = I_C + I_S = E_C + E_S$$

conduisant à un système :

- de $6L = E_C + E_S$ équations linéaires ;
- de $6L = I_C + I_S$ inconnues ;
- de rang $r_C + r_S$;
- comprenant $h + m$ équations « inutiles ».

Formulation globale

Approche cinématique

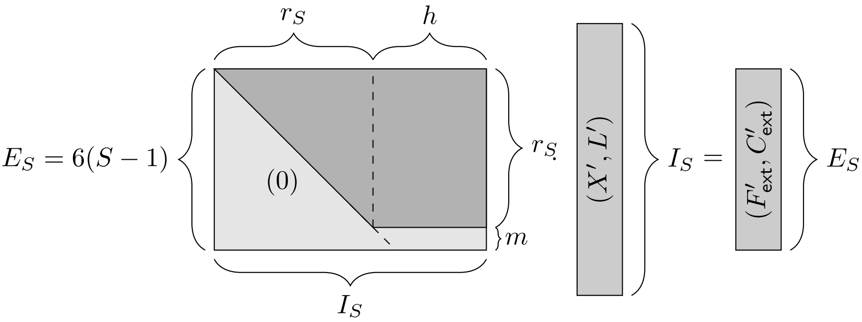


$$h = E_C - r_C$$

le degré d'hyperstatisme h limite le nombre d'équations cinématiques

Formulation globale

- Approche statique/dynamique



$$m = E_S - r_S$$

le degré de mobilité m limite le nombre d'équations statiques (ou dynamiques)

Formulation globale

Relation fondamentale

$$h - m = E_C - I_C = I_S - E_S$$

Dualité des 2 approches

- approche cinématique :

$$h = E_C - r_C = I_S - r_S$$

le degré d'hyperstatisme h limite le nombre d'équations cinématiques

- approche statique/dynamique :

$$m = E_S - r_S = I_C - r_C$$

le degré de mobilité m limite le nombre d'équations statiques (ou dynamiques)

Détermination pratique

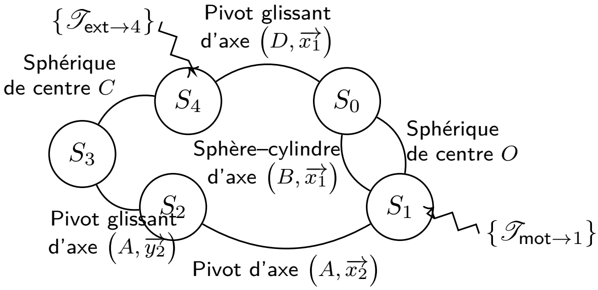
Méthode

1. réaliser le graphe de structure à partir d'un modèle cinématique d'architecture du mécanisme (pour ne pas perdre d'information)
2. déterminer le nombre d'équations et d'inconnues cinématiques E_C et I_C ;
3. déterminer le degré de mobilité (total) du mécanisme m, si possible par une démarche intuitive en séparant :
   - la détermination du nombre de mobilités utiles m_u lié au nombre de relations entrée(s)–sortie(s) indépendantes du mécanisme ;
   - le nombre de mobilités internes m_i lié au nombre de mouvements entre les pièces du mécanisme qui n'affectent pas le fonctionnement du mécanisme ;
4. en déduire le degré d'hyperstatisme du mécanisme avec la relation :

$$h = E_C - I_C + m$$

Exemple : système d'encapsulation

1. Graphe de structure :



2. $E_C = 12$ équations, $I_C = 15$ inconnues
3. $m_u = 1$ mobilité utile car une loi E-S et $m_i = 2$ mobilités internes associées aux 2 ensembles en série avec la liaison sphérique de centre C
$\Rightarrow m = m_u + m_i = 3$
4. degré d'hyperstatisme $h = E_C - I_C + m = 0$