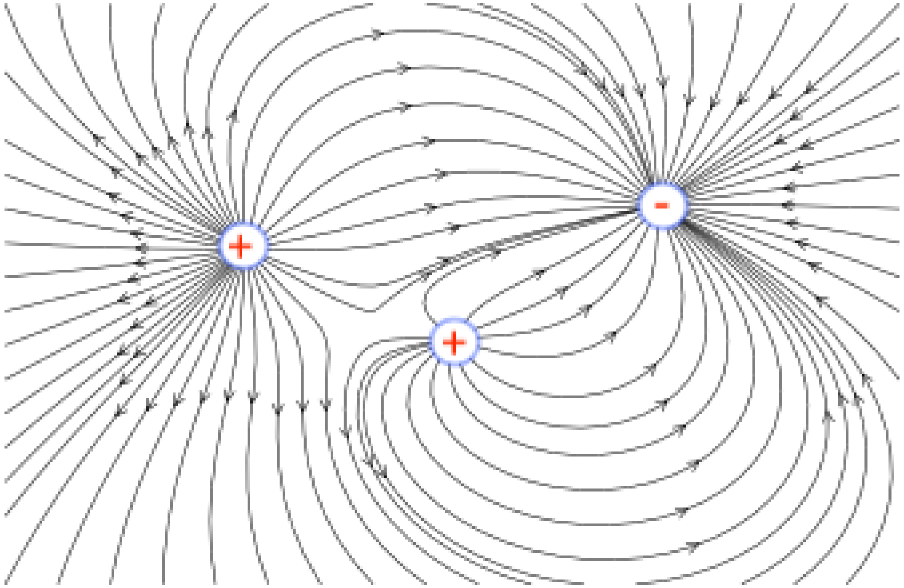
Exercice 1. Carte de champ électrique



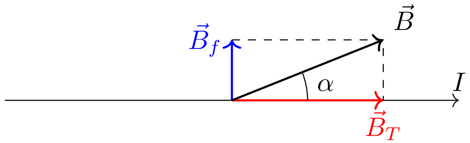
Exercice 2. Champ magnétique terrestre

On se place dans le système de coordonnées cylindriques d'axe le fil. Le champ magnétique terrestre est dirigé selon $\vec{e}_z$: $\vec{B}_T = B_T \vec{e}_z$.

Le champ créé par le fil a pour intensité $B_f = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi d} = 8 \times 10^{-6}$ T et sa direction $\vec{e}_\theta$ est perpendiculaire au fil et située dans un plan horizontal au niveau de l'aiguille.

Le champ total est $\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_f$. L'aiguille s'aligne dans ce champ, qui fait donc un angle $\alpha = 22°$ avec $\vec{e}_z$.

Voici la situation vue de dessus :



Ainsi, $\tan\alpha = \dfrac{B_f}{B_T}$ soit $\boxed{B_T = \dfrac{B_f}{\tan\alpha}} = \underline{2{,}0 \times 10^{-5}\ \text{T}}$.

Note : il s'agit de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, qui comporte aussi une composante verticale.

Exercice 3. Moment magnétique d'une particule

1. La charge passant en une section du « circuit » vaut en moyenne q sur une période T. L'intensité moyenne du courant vaut donc $\boxed{I = q/T}$.
2. Soit Oz l'axe de révolution de la particule. Alors $\vec{\mu} = IS\vec{n} = \pi R^2 q/T \vec{e}_z$.

   En notant que $v = 2\pi R/T$, le moment magnétique se met sous la forme $\boxed{\vec{\mu} = \dfrac{qvR}{2}\,\vec{e}_z}$.
3. Le moment cinétique est $\vec{L} = r\vec{e}_r \wedge (mv\vec{e}_\theta) = mrv\,\vec{e}_z$ pour un mouvement uniforme. Il a la même direction $\vec{e}_z$ que le moment magnétique.
4. On voit que $\vec{\mu} = (q/2m)\vec{L}$: le rapport gyromagnétique $\boxed{\gamma = \dfrac{\mu}{L} = \dfrac{q}{2m}}$ ne dépend que des caractéristiques de la particule.

Exercice 4. Bobines de Helmhlotz

1. Le point M est à l'abscisse $z + d/2$ relativement à la première boucle de courant, et à l'abscisse $z - d/2$ relativement à la seconde.
   Les champs créés par les deux spires sont donc :

$$\vec{B}_\pm(z) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + (z \pm d/2)^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

   donc le champ total est : $\vec{B}(z) = \dfrac{\mu_0 I}{2R} f(z/R)\,\vec{e}_z$ avec :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\left(1 + \left(x - \dfrac{d}{2R}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(x + \dfrac{d}{2R}\right)^2\right)^{3/2}}}$$

2. La fonction f est paire donc seules les dérivées paires ont une valeur non-nulle en $x = 0$. À l'ordre 3 on a donc $\boxed{f(x) = f(0) + \dfrac{x^2}{2} f''(0) + o(x^3)}$ avec :

$$\boxed{f(0) = \frac{2}{\left(1 + \left(\dfrac{d}{2R}\right)^2\right)^{3/2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{f''(0) = \frac{6\left(-1 + 4\left(\dfrac{d}{2R}\right)^2\right)}{\left(1 - \left(\dfrac{d}{2R}\right)^2\right)^{7/2}}}$$

En effet :

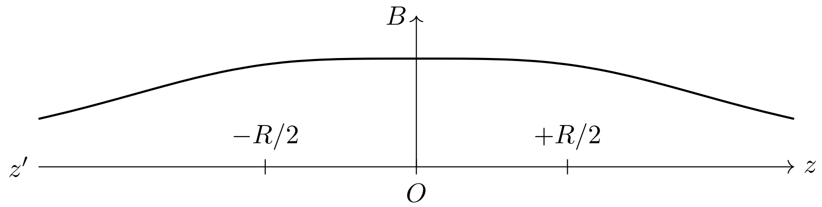
$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{2}\times 2\left(x-\frac{d}{2R}\right)}{\left(1+\left(x-\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{-\frac{3}{2}\times 2\left(x+\frac{d}{2R}\right)}{\left(1+\left(x-\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{5/2}}$$

$$f''(x) = -3\left(\frac{1}{\left(1+\left(x-\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{1}{\left(1+\left(x+\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{5/2}}\right) + \frac{\frac{15}{2}\times 2\left(x-\frac{d}{2R}\right)^2}{\left(1+\left(x-\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{7/2}} + \frac{\frac{15}{2}\times 2\left(x+\frac{d}{2R}\right)^2}{\left(1+\left(x+\frac{d}{2R}\right)^2\right)^{7/2}}$$

3. Le champ est très uniforme si le terme en x^2 du développement s'annule. C'est le cas pour $\boxed{d = R}$.

   Le champ central vaut alors : $\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} f(0)\vec{e}_z + o((z/R)^3)}$ avec $\boxed{f(0) = \frac{2}{(5/4)^{3/2}}} \simeq \underline{1{,}43}$.

   Voici l'allure du champ sur l'axe, qui est effectivement quasi constant entre les boucles de courant :



Exercice 5. Champ électrique dipolaire

1. Soit P la position de la charge positive. La distasnce PM est la norme du vecteur $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$ où $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques et $\overrightarrow{OP} = (a/2)\,\vec{e}_z$.

   Il vient $PM^2 = \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PM} = (\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}) = OM^2 + OP^2 - 2\,\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP} = r^2 + (a/2)^2 - 2r(a/2)\cos\theta$.

   Pour conclure, $\boxed{PM = \sqrt{r^2 - ra\cos\theta + (a/2)^2}}$.

2. $V_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1-(a/r)\cos\theta + (a/r)^2/4}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\times[1-(a/r)\cos\theta + (a/r)^2/4]^{-1/2}$.

   À l'ordre 1 en a/r, on a $\boxed{V_+ \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}(1+(a/2r)\cos\theta)}$.

3. La démarche est identique, en remplaçant q par $-q$ et a par $-a$. On obtient donc $\boxed{V_- \approx \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}(1-(a/2r)\cos\theta)}$.

4. Les équations de l'électromagnétisme étamt linéaires, le principe de superposition s'applique. Le potentiel en M est la somme des potentiels dus aux deux charges séparées :

$$\boxed{V = V_+ + V_- \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\times(a/r)\cos\theta = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta}$$

5. $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi$, où :

   - $\frac{\partial V}{\partial r} = -2\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta$;
   - $\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$;
   - $\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$.

   Pour conclure : $\boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,(2\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta)}$.