

Fiche 69 : TD du 7-05

Exercice 1

Quelle est la nature de la série suivante :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $]0, 1]$, continue et décroissante sur $]0, 1]$.

Attention : f n'est pas supposée dérivable sur $[0, 1]$, les résultats du cours sur les sommes de Riemann ne s'appliquent pas ici.

On considère la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$r_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et la fonction I définie sur $]0, 1]$ par : $\forall x \in]0, 1]$, $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On suppose, de plus, que $\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x.f(x) = 0$.

Démontrer que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

4. Dans cette question, on pose, pour tout réel $x \in]0, 1]$.

$$f(x) = -\ln(x)$$

(a) Montrer que f satisfait les hypothèses des questions précédentes.

(b) En utilisant les questions précédentes (sans utiliser la formule de Stirling), démontrer que la suite $\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit $a < b$ des réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ vérifiant $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$.

1. Démontrer qu'il existe un unique $\gamma \in]a, b[$ tel que $f(\gamma) = 0$.
2. On pose $x_0 = b$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 avec l'axe des abscisses. Justifier que $x_1 \in [\gamma, b]$ et que $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
On pourra utiliser la convexité de f
3. On réitère le procédé et on construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ avec $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. *On admettra que cette suite est bien définie.*
 - (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par γ .
 - (b) Démontrer finalement que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers γ .
4. On souhaite estimer la vitesse de convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers γ .
 - (a) Justifier l'existence du réel : $k = \frac{1}{2} \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f'|}$.

(b) Justifier que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$|f(\gamma) - f(x) - f'(x)(\gamma - x)| \leq \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{2} |x - \gamma|^2.$$

(c) En déduire que

$$|x_{n+1} - \gamma| \leq k|x_n - \gamma|^2 \text{ avec } k = \frac{1}{2} \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f'|}.$$

5. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, on a : $k|x_n - \gamma| \leq (k|x_0 - \gamma|)^{2^n}$.