Fiche 70 : espaces euclidiens.

Exercice 1

À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P, Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Soient x, y et z trois réels tels que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer l'inégalité :

$$(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}.$$

(On pourra par exemple appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à certains vecteurs de $\mathbb{R}^3$ pour un produit scalaire bien choisi.)

Exercice 3

Montrer que

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Étudier le cas d'égalité.
Soit f et g deux applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall (f, g) \in C^0([0, 1], \mathbb{R}) \qquad \left(\int_0^1 f(t)g(t)dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt \int_0^1 g^2(t)dt.$$

Étudier le cas d'égalité.
Soit f une application continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \qquad \left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b - a) \int_a^b f^2(t)dt.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 4

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P|Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

Exercice 5

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $F = \text{vect}(e_1, e_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $(1, 1, 1, 1)$ au sous-espace vectoriel F.