PROBLÈME I

Étude du mouvement d'un satellite

Partie A. Propriétés générales d'un mouvement orbital

I.1) Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de la Terre et des axes fixes dans l'Univers.
Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié : tout point matériel isolé y a un mouvement rectiligne et uniforme.

I.2) $\vec{F}_g = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{OM^2}\vec{u}$ où $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ est le vecteur unitaire dirigé de O vers M.

I.3) D'après le théorème du moment cinétique en O, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$ puisque $\vec{F}_g$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.
On en déduit que $\vec{\mathcal{L}}_O$ se conserve.
Or $\vec{\mathcal{L}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \perp \overrightarrow{OM}$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ reste donc **perpendiculaire à une direction constante** tout au long du mouvement, par conséquent M se déplace dans un plan contenant O et perpendiculaire à $\vec{\mathcal{L}}_O$.

I.4) En coordonnées polaires, $OM = r$ et $\vec{u} = \vec{e}_r$ soit $\vec{F}_g = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}\vec{e}_r$.
On cherche $\mathcal{E}_p$ telle que $\vec{F}_g = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p)$.
$\vec{F}_g$ étant radiale, $\mathcal{E}_p$ ne peut dépendre que de r et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p) = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r$.
On identifie : $\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}$.
Une telle fonction existe : $\boxed{\mathcal{E}_p = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r}}$ où $\mathcal{E}_p \to 0$ lorsque $r \to \infty$.
On en déduit que $\vec{F}_g$ est **conservative.**

I.5) En coordonnées polaires, $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$. Le moment cinétique vaut donc $\vec{\mathcal{L}}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$ d'où $\mathcal{L}_O = mr^2\dot{\theta}$.
Inversement, $r\dot{\theta} = \dfrac{\mathcal{L}_O}{mr}$. Le vecteur vitesse s'écrit alors $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + \dfrac{\mathcal{L}_O}{mr}\,\vec{e}_\theta$.
L'énergie cinétique a pour expression $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \dfrac{\mathcal{L}_O^2}{m^2r^2}\right) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2}$.
Pour finir, l'énergie mécanique se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{\mathcal{G}M_T m}{r}$$

On identifie l'énergie potentielle effective $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r}}$.

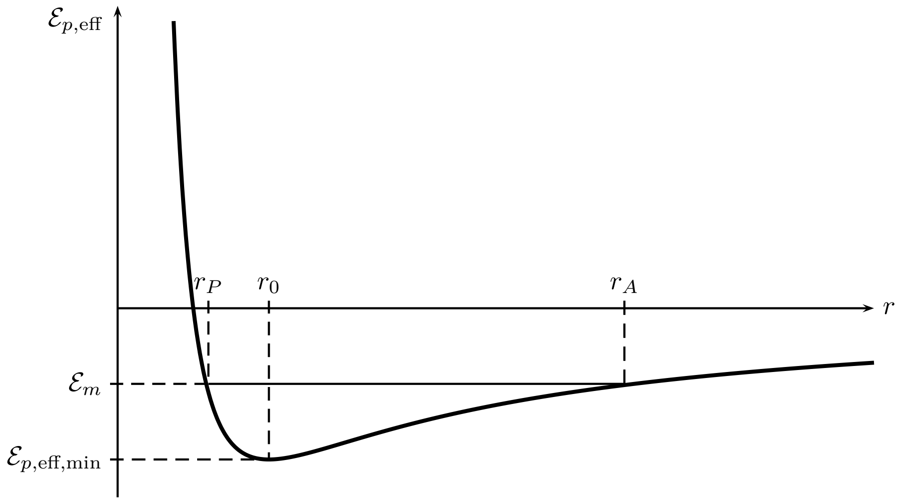
I.6) $\dot{r}^2 \geqslant 0$ donc $\mathcal{E}_m \geqslant \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ à tout instant.

I.7) Voir figure page suivante.

I.8) $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ au **périgée** (point de la trajectoire le plus proche de O) où $r = r_P$ et à l'**apogée** (point de la trajectoire le plus éloigné de O) où $r = r_A$.
Dans le cas où l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective minimale, le rayon $r = r_0$ est fixé. On a alors un mouvement **circulaire**.

I.9) Au périgée on a $\mathcal{E}_m = \dfrac{\mathcal{L}_O^2}{2mr_P^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_P}$ d'où l'on tire $\dfrac{\mathcal{L}_O^2}{2m} = r_P^2\left(\mathcal{E}_m + \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_P}\right)$.
À l'apogée, $\mathcal{E}_m = \dfrac{\mathcal{L}_O^2}{2mr_A^2} - \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_A}$. En reportant l'expression précédente :

$$\mathcal{E}_m = \frac{r_P^2}{r_A^2}\left(\mathcal{E}_m + \frac{\mathcal{G}M_T m}{r_P}\right) - \frac{\mathcal{G}M_T m}{r_A} = \frac{1}{r_A^2}(r_P^2\mathcal{E}_m + (r_P - r_A)\mathcal{G}M_T m)$$



Alors $(r_A^2 - r_P^2)\mathcal{E}_m = (r_P - r_A)\mathcal{G}M_T m$ soit $(r_A - r_P)(r_A + r_P)\mathcal{E}_m = -(r_A - r_P)\mathcal{G}M_T m$.

On en déduit l'expression attendue : $\boxed{\mathcal{E}_m = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_A + r_P}}$

I.10) Dans le cas circulaire $r_A = r_P = r_0$ donc l'énergie mécanique vaut $\boxed{\mathcal{E}_m = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0}}$.

L'énergie cinétique vaut $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0} + \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_0} = \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{2r_0}$ donc la vitesse a pour expression :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_0}}}$$

Partie B. Fin de vie d'un satellite

I.11) Sur l'orbite intiale, circulaire de rayon R, $\mathcal{E}_{m,i} = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{2R}$.

Sur l'orbite de transfert de Hohmann, de périgée R_c et d'apogée R, $\mathcal{E}_{m,H} = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{R + R_c}$.

La variation d'énergie mécanique vaut :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,H} - \mathcal{E}_{m,i} = -\mathcal{G}M_T m\left(\frac{1}{R + R_c} + \frac{1}{2R}\right) = \mathcal{G}M_T m\frac{R_c - R}{2R(R + R_c)}}$$

$R_c < R$ donc $\boxed{\Delta\mathcal{E}_m < 0}$: l'énergie mécanique doit diminuer. Or l'énergie potentielle est constante au moment du changement d'orbite, ce qui signifie que l'énergie cinétique doit diminuer : il faut **freiner** le satellite.

I.12) On calcule de la manière la variation d'énergie mécanique lorsque le satellite passe de l'obite de Hohmann à l'orbite cimetière : $\Delta\mathcal{E}'_m = \mathcal{G}M_T m\dfrac{R_c - R}{2R_c(R + R_c)} < 0$. Là encore, il faut **freiner** le satellite.

I.13) La puissance de la force de frottement est :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = -K\rho(h)||\vec{v}||^3 \approx -K\rho_0 e^{-h/H}\left(\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T + h}\right)^{3/2}}$$

D'après le théorème de la puissance mécanique, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F})$.

Or $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{2(R_T + h)^2}\dot{h}$.

En négligeant h devant R_T, il vient :

$$\frac{\mathcal{G}M_T m}{2R_T^2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -K\rho_0 e^{-h/H}\left(\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T}\right)^{3/2}$$

On sépare les variables t et h :

$$e^{h/H}\mathrm{d}h = -2\frac{K\rho_0}{m}\sqrt{\mathcal{G}M_T R_T}\,\mathrm{d}t$$

puis on intègre entre l'instant initial où $h(0) = h_0$ et l'instant t :

$$H\left(e^{h/H} - e^{h_0/H}\right) = -2\frac{K\rho_0}{m}\sqrt{\mathcal{G}M_T R_T}\,t$$

On obtient l'équation demandée :

$$\exp\left(\frac{h_0}{H}\right) - \exp\left(\frac{h}{H}\right) = \frac{t}{\tau}$$

en posant $\boxed{\tau = \dfrac{Hm}{2K\rho_0\sqrt{\mathcal{G}M_T R_T}}}$.

I.14) Au sol, $h = 0$, la durée de la chute vaut : $\boxed{t = \tau(e^{h_0/H} - 1) = 5{,}5 \times 10^6\,\mathrm{s}}$ soit **64 jours**.
C'est trop bref et dangereux. Choisir une orbite cimetière aussi basse n'est donc pas une bonne idée.

PROBLÈME II

Pile zinc-air

II.1) Le nombre d'oxydation du zinc passe de **0** dans Zn(s) à **II** dans ZnO(s).
Celui de l'oxygène passe de **0** dans O_2(g) à **-II** dans ZnO(s).

II.2) Le nombre d'ocydation Zn augmente donc Zn est oxydé à l'électrode A_1. Il y subit une **oxydation** (perte d'électrons) donc **A_1 est l'anode et constitue le pôle négatif de la pile** car les électrons sortent de la pile par le pôle négatif.
Inversement, O_2 est réduit à **la cathode A_2 qui constitue le pôle positif de la pile**.

II.3) La demi-équation pour le couple ZnO/Zn est : $\mathrm{Zn(s)} + \mathrm{H_2O}(\ell) = \mathrm{ZnO(s)} + 2\mathrm{H^+(aq)} + 2e^-$.
D'après la formule de Nernst, le potentiel de l'électrode A_1 est :

$$\boxed{E_1 = E^\circ(\mathrm{ZnO/Zn}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}}\ln(a(\mathrm{H^+})^2) = E^\circ(\mathrm{ZnO/Zn}) - e_0\,\mathrm{pH}}$$

en ayant posé $e_0 = \dfrac{RT}{\mathcal{F}}\ln(10) = 0{,}058\,\mathrm{V}$ à 20 °C.

La demi-équation pour le couple O_2/H_2O est : $2\,\mathrm{H_2O}(\ell) = \mathrm{O_2(g)} + 4\mathrm{H^+(aq)} + 4e^-$.
D'après la formule de Nernst, le potentiel de l'électrode A_2 est :

$$\boxed{E_2 = E^\circ(\mathrm{O_2/H_2O}) + \frac{e_0}{4}\log(a(\mathrm{H^+})^4 \times p^\circ/p(\mathrm{O_2})) = E^\circ(\mathrm{O_2/H_2O}) - \frac{e_0}{4}\log(x(\mathrm{O_2})P_{atm}/p^\circ) - e_0\,\mathrm{pH}}$$

La force électromotrice vaut :

$$\boxed{e = E_2 - E_1 = E^\circ(\mathrm{O_2/H_2O}) - E^\circ(\mathrm{ZnO/Zn}) - \frac{e_0}{4}\log(x(\mathrm{O_2})P_{atm}/p^\circ) = 1{,}65\,\mathrm{V}}$$

Remarque : c'est supérieur à la tension de fonctionnement à cause de la résistance interne : $u = e - ri$.

La f.e.m. reste **constante** car le dioxygène a toujours la même pression.

II.4) L'équation de fonctionnement implique le transfert de 4 électrons. On obtient la constante d'équilibre :

$$\boxed{K^\circ = 10^{4(E^\circ(\mathrm{O_2/H_2O}) - E^\circ(\mathrm{ZnO/Zn}))/e_0} = 10^{114} \gg 1}$$

La réaction peut être considérée comme **totale**.

II.5) La pile s'arrête alors lorsque le réactif limitant, le zinc, est entièrement consommé.

Il y a une quantité $n = m/M = 1{,}0 \times 10^{-2}$ mol de zinc. L'oxydation d'un atome de zinc libère 2 électrons, soit une quantité $2n$ en tout. La constante de Faraday est la charge d'une mole d'électrons donc la capacité de la pile vaut $\boxed{Q = 2n\mathcal{F} = 1{,}9\,\mathrm{kC}}$.

$1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{C}$ donc $\boxed{Q = 0{,}53\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{h}}$.

II.6) $Q = I.\Delta t$ donc $\boxed{\Delta t = Q/I = 2{,}4 \times 10^{6}\,\mathrm{s}}$ soit 28 jours environ.

L'énergie électrique fournie est $\boxed{E = UI\Delta t = 2{,}9\,\mathrm{kJ}}$.

PROBLÈME III

Expérience de Cavendish

Commençons par étudier le mouvement d'oscillation.

Les actions mécaniques exercés sur le système solide constitué du fléau et des petites sphères sont les poids des sphères, l'action du fil (tension + torsion). On néglige les frottements. Les poids et la tension du fil sont verticales donc ont un moment nul par rapport à l'axe Oz vertical, le seul moment non-nul est celui du couple de torsion.

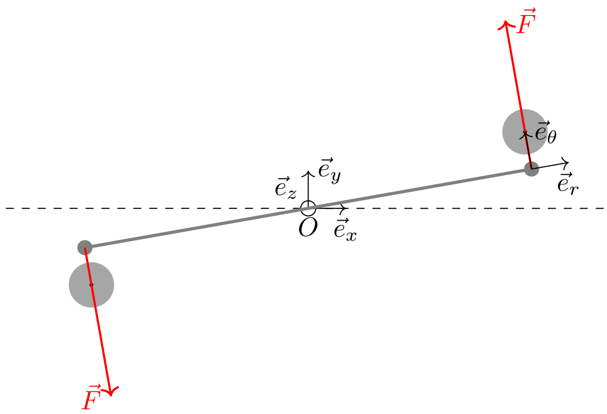
On applique le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe Oz : $J\dot{\omega} = \Gamma_t$ où $\omega = \dot{\theta}$ et $J = 2 \times m(L/2)^2$ est le moment d'inertie par rapport à Oz.

On obtient $J\ddot{\theta} + C\theta = 0$. C'est un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{C/J}$ donc de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{J/C}$.

On en déduit la constante de torsion $\boxed{C = \dfrac{4\pi^2 J}{T_0^2} = \dfrac{2\pi^2 mL^2}{T_0^2} = 6{,}93 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}}$.

Étudions maintenant la situation avec les sphères.

L'attraction gravitationnelle des grosses sphères sur leur petite sphère voisine est orthoradiale. On l'exprime dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ avec la loi de Newton : $\vec{F} = \dfrac{\mathcal{G}Mm}{d^2}\vec{e}_\theta$.



Par symétrie, les deux forces exercées sur les petites sphères sont opposées donc forment un couple. Chacune d'entre elles a un moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F} = (L/2)\vec{e}_r \wedge (\mathcal{G}Mm/d^2)\vec{e}_\theta = \dfrac{\mathcal{G}MmL}{2d^2}\vec{e}_z$.

Le couple a pour moment la somme de ces 2 moments identiques : $\vec{\Gamma} = \dfrac{\mathcal{G}MmL}{d^2}\vec{e}_z$.

À l'équilibre le moment résultant des forces exercées sur le pendule s'annule : $\vec{\Gamma}_t + \vec{\Gamma} = \vec{0}$.

On en déduit la constante de gravitation : $\boxed{\mathcal{G} = \dfrac{Cd^2\theta_{eq}}{MmL} = 6{,}71 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}}$

En identifiant le poids à la surface de la Terre à la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre à la distance R_T de son centre, on a : $P = mg = \dfrac{\mathcal{G}M_T m}{R_T^2}$.

Ainsi la masse de la Terre vaut $\boxed{M_T = \dfrac{gR_T^2}{\mathcal{G}} = 5{,}93 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}$ soit seulement 0,7 % d'écart avec la valeur rélle.