PROBLÈME I

Étude du mouvement d'un satellite

On se propose d'étudier le mouvement d'un satellite d'observation, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T.

Partie A. Propriétés générales d'un mouvement orbital

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M, dans le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_T)$ considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

I.1) Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.

I.2) Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{F}_g$ exercée par la Terre sur le mobile de masse m.

I.3) Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel $(\mathcal{R}_T)$ le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de façon à ce que le moment cinétique $\mathcal{L}_O$ soit aligné avec $\vec{e}_z$. On posera $\mathcal{L}_O = \mathcal{L}_O\,\vec{e}_z$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ), de centre O, pour décrire le mouvement du mobile (figure 1).

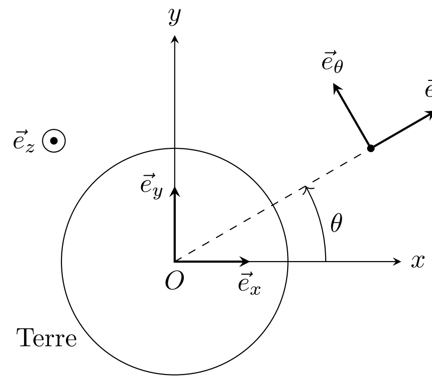


FIGURE 1 – Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

I.4) Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à linfini.

I.5) Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \tag{1}$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé énergie potentielle effective, que l'on exprimera en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_T, $\mathcal{L}_O$ et de r.

I.6) Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.

I.7) Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_O$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ du mobile en fonction de r. Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

I.8) Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

I.9) On note r_P (resp. r_A) la valeur de r au périgée (resp. apogée) de l'orbite elliptique. En utilisant l'équation 1, montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r_P + r_A}$$

I.10) En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et de la vitesse v du mobile dans le cas d'une orbite circulaire de rayon r_0 en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_T et de r_0.

Partie B. Fin de vie d'un satellite

En fin de vie, un satellite est dirigé vers une orbite dite « cimetière », d'altitude moins haute que son orbite initiale avant d'être définitivement abandonné.

On se propose d'étudier une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré figure 2, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'apogée A est situé sur l'orbite initiale (rayon R) et dont le périgée P est sur l'orbite cimetière (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

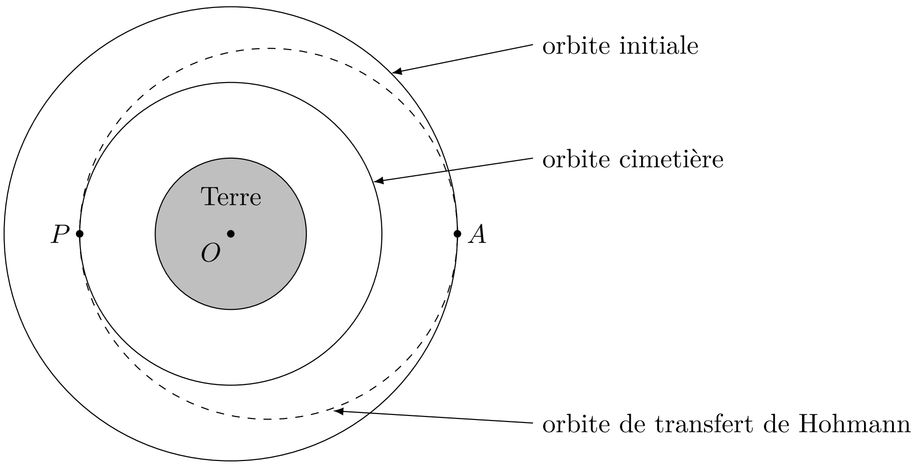


FIGURE 2 – Tracé des différentes orbites du satellite

I.11) Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

I.12) En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetière.

Une fois sur son orbite cimetière, le satellite est abandonné à partir de l'altitude h_0 aux frottements de l'atmosphère, qu'on modélise par la force $\vec{F}$ dépendant de la masse volumique $\rho(h)$ à l'altitude h :

$$\vec{F} = -K\,\rho(h)\,||\vec{v}||\,\vec{v} \quad \text{avec} \quad \rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$$

où $H = 11\,\text{km}$ et K est une certaine constante.

On considérera une évolution assez lente pour conserver en permanence le caractère quasi-circulaire de l'orbite, donc aussi les relations $v(r)$ et $\mathcal{E}_m(r)$ établies à la question I.10).

I.13) Expliciter la puissance dissipée par les forces de frottement. En déduire l'équation d'évolution de l'altitude $h(t)$ en fonction du temps et montrer que sa solution approchée respecte l'équation suivante :

$$\exp\left(\frac{h_0}{H}\right) - \exp\left(\frac{h}{H}\right) = \frac{t}{\tau}$$

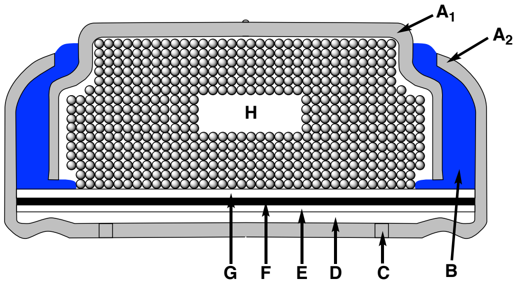
sous réserve de considérer que $h \ll R_T$; expliciter la constante de temps τ en fonction de ρ_0, m, K, $\mathcal{G}$, M_T, R_T et H.

I.14) Sachant que $\tau = 7 \times 10^{-2}\,\text{s}$, estimer, en jours, la durée de la chute jusqu'au sol d'un satellite dont l'orbite cimetière serait à l'altitude $h_0 = 200\,\text{km}$. Commenter.

PROBLÈME II

Pile zinc-air

Les piles zinc-air sont des accumulateurs tirant leur énergie de l'oxydation du zinc avec le dioxygène de l'air ambiant (schéma ci-dessous). Ces piles possèdent de hautes densités énergétiques et sont peu chères. Leur format varie des piles boutons pour les audioprothèses à des formats intermédiaires, pouvant être utilisés dans des appareils tels les caméras, jusqu'aux grands formats utilisables dans les véhicules électriques.



A_1 et A_2 : revêtements métalliques
B : joint isolant
C : orifice d'entrée d'air,
D : membrane semi-perméable
E : dioxygène (air)
F : membrane hydrophobe
G : séparateur
H : poudre de zinc et électrolyte (solution gélifiée de potasse)

Données :

- Potentiels redox stantards à pH = 0 : $E°(O_2/H_2O) = 1{,}23\,V$; $E°(ZnO/Zn) = -0{,}43\,V$
- Constante de Faraday : $\mathcal{F} = 9{,}65 \times 10^4\,C \cdot mol^{-1}$
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,mol^{-1}$
- Pression atmosphérique : $P_{atm} = 1{,}01\,bar$
- Composition molaire de l'air : $x(N_2) = 21\,\%$; $x(O_2) = 21\,\%$; $x(Ar) = 1\,\%$
- Masses molaires : $M(O) = 16{,}0\,g \cdot mol^{-1}$; $M(Zn) = 65{,}4\,g \cdot mol^{-1}$

La pile étudiée a les caractéristiques suivantes :

- Masse de la pile : 1,0 g
- Masse de zinc dans la pile : 0,65 g
- Équation de fonctionnement : $2\,Zn(s) + O_2(g) = 2\,ZnO(s)$
- Intensité de fonctionnement : 0,80 mA
- Tension de fonctionnement : 1,5 V

II.1) Donner les nombres d'oxydation de Zn et O dans les espèces chimiques impliquées dans l'équation de fonctionnement.

II.2) Identifier, parmi A_1 et A_2, l'anode et la cathode et déterminer la polarité de la pile. Justifier.

II.3) Déterminer la force électromotrice initiale de la pile, à la pression atmosphérique et à la température de 20 °C. Comment évolue-t-elle au cours du temps lors de l'utilisation de la pile ?

II.4) Calculer la constante d'équilibre de la réaction de fonctionnement de la pile. Commenter.

II.5) Déterminer la capacité de cette pile, en Coulomb puis en A · h.

II.6) Calculer la durée théorique pendant laquelle cette pile peut fonctionner sans être déchargée, ainsi que l'énergie qu'elle peut fournir.

PROBLÈME III

Expérience de Cavendish

La faible intensité de la force de gravitation par rapport aux autres forces rend sa mesure difficile. En 1798, Cavendish réalise cet exploit en utilisant un pendule de torsion constitué d'un fléau (tige rigide horizontale de longueur $L = 1{,}86\,\mathrm{m}$ et de masse négligeable) aux extrémités duquel sont placées deux petites sphères identiques de masse $m = 0{,}73\,\mathrm{kg}$ assimilées à des points matériels (voir figure 3).

Le fléau est suspendu en son centre O par un fil métallique confondu avec l'axe vertical Oz et attaché en un point fixe du référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. Lorsqu'il est tordu d'un angle θ, le fil exerce sur le fléau le couple de torsion de moment $\vec{\Gamma}_t = -C\theta\,\vec{e}_z$ où $C > 0$ est la constante de torsion.

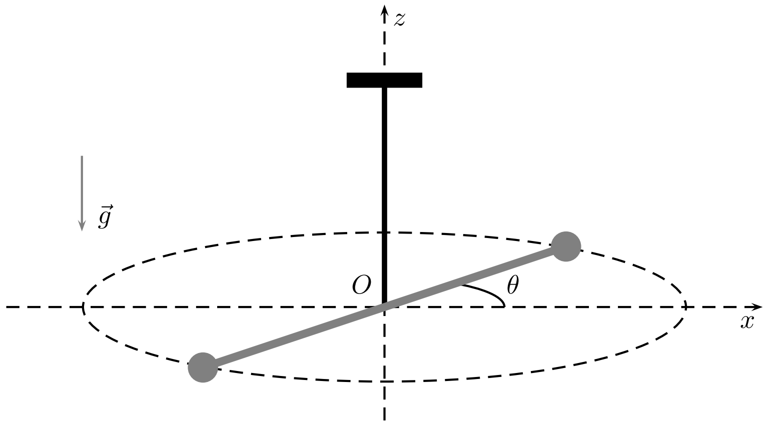


FIGURE 3 – Pendule de torsion

Quand on tord le pendule et qu'on lâche, il se met osciller autour de sa position d'équilibre. Cavendish mesure une période $T = 848\,\mathrm{s}$.

Ensuite, Cavendish approche deux grosses sphères de masse $M = 158\,\mathrm{kg}$ de chacune des extrémités du pendule (voir figure 4 à gauche). Le pendule se met à tourner et au bout de quelques heures, l'équilibre est atteint. À l'aide d'une méthode optique utilisant un miroir, Cavendish mesure un angle de rotation du fléau $\theta_{eq} = 4{,}10 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$ par rapport à sa direction en l'absence des sphères. La distance entre les centres de chacune des deux grosses sphères et de sa petite sphère voisine vaut alors $d = 22{,}5\,\mathrm{cm}$. La figure à doite représente l'expérience dans le plan (Ox, Oy) horizontal.

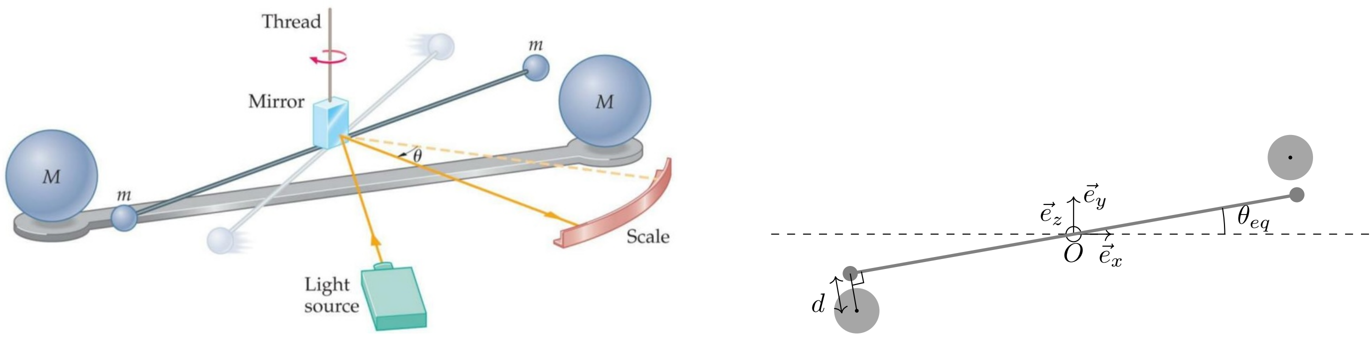


FIGURE 4 – Expérience de Cavendish

En supposant la Terre sphérique de rayon $R_T = 6{,}37 \times 10^6\,\mathrm{m}$, et connaissant l'accélération de la pesanteur à sa surface $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ (que l'on assimile au champ gravitationnel de la Terre), Cavendish a déduit de ses expériences la première mesure de la masse de la Terre.

Combien a-t-il trouvé ?

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie même si elle n'a pas abouti, car elle est valorisée dans le barème.