

Fiche 72 : espaces euclidiens.

Exercice 1

Soit E l'espace euclidien canonique \mathbb{R}^4 , F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de F .
2. Donner la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur F .
3. Calculer $d(e_1, F)$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\text{Ker}(p) \perp \text{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 3

Soit $\alpha = \inf \left\{ \int_0^1 (ax + b - e^x)^2 dx : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Déterminer un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(E, | \cdot |)$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = d(v, F)^2$.
2. Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = d(v, p)^2$ et α .