Exercice 1. Spectrographe de masse

1. Dans le vide poussé, seule la force électrostatique travaille dans la chambre d'accélération. Elle est conservative donc l'énergie mécanique se conserve.
   En T_1, elle vaut $\mathcal{E}_m(T_1) = \mathcal{E}_p(T_1) = qV_1$ puisqu'on considère la vitesse négligeable.
   En T_2, elle vaut $\mathcal{E}_m(T_2) = \mathcal{E}_c(T_2) + \mathcal{E}_p(T_2) = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + qV_2$.
   Par conservation, $\dfrac{1}{2}mv_0^2 = q(V_1 - V_2) = qU$ donc $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}}$.
2. Lorsque l'ion entre dans la chambre de déviation, $q\vec{v}$ est dirigé vers le bas sur le schéma. Pour que $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ soit dirigée vers la droite afin qu'il tourne vers le collecteur, il fait que $\vec{B}$ plonge dans le plan de la feuille.
   L'ion tourne alors de façon circulaire avec une vitesse angulaire égale à la pulsation cyclotron $\omega_c = \dfrac{qB}{m}$.
   Le rayon de la trajectoire est $R = \dfrac{v_0}{\omega_c} = \dfrac{m}{qB}\sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$ soit $\boxed{R = \sqrt{\dfrac{2mU}{qB^2}}}$.
3. La distance latérale parcourue par l'ion est $d = 2R$.
   Ici les ions ont pour charge $q = 2e$ et pour masse $m \simeq A\,m_n$ donc $d = 2\sqrt{\dfrac{Am_nU}{eB^2}} = \sqrt{A} \times 0{,}129\,\mathrm{m}$.
   Pour $A = 68$, $\underline{d_{68} = 1{,}066\,\mathrm{m}}$ et pour $A = 70$, $\underline{d_{70} = 1{,}081\,\mathrm{m}}$, soit un écart de $1{,}5\,\mathrm{cm}$.
   La fente d'entrée du collecteur doit donc avoir une largeur inférieure à $1{,}5\,\mathrm{cm}$ afin de ne recevoir qu'un seul type d'isotope à la fois.

Exercice 2. Tube à rayons cathodiques

1. Par conservation de l'énergie, $\mathcal{E}_c = eU$ donc $\boxed{U = \dfrac{mv_0^2}{2e}} = \underline{1{,}5\,\mathrm{kV}}$.
2. On applique le PFD : $-e\vec{E} = m\vec{a}$ d'où $\vec{a} = \dfrac{eE}{m}\vec{e}_y$. Alors $\vec{v} = v_0\vec{e}_x + \dfrac{eEt}{m}\vec{e}_y$ puis $\overrightarrow{OM} = v_0t\vec{e}_x + \dfrac{eEt^2}{2m}\vec{e}_y$.
   On a donc $x = v_0t$ et $y = \dfrac{eEt^2}{2m}$. On isole $t = x/v_0$ que l'on reporte dans l'équation horaire de y pour obtenir l'équation de la trajectoire : $\boxed{y = \dfrac{eEx^2}{2mv_0^2}}$.
3. L'électron sort de l'espace inter-plaques en $x_S = L$ soit en $\boxed{y_S = \dfrac{eEL^2}{2mv_0^2}}$. La direction de son vecteur vitesse est donnée par l'angle α qu'il fait avec l'horizontale : $\tan(\alpha) = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{eEt}{mv_0}$. L'électron sort en S à $t_S = L/V_0$ donc $\boxed{\tan(\alpha_S) = \dfrac{eEL}{mv_0^2}}$.
   L'équation de la tangente est $y - y_S = \tan(\alpha_S)(x - x_S)$. Elle coupe l'axe (Ox) en $y = 0$ donc en $x = x_S - \dfrac{y_S}{\tan(\alpha_S)} = L - L/2 = L/2$: c'est la opint C au centre de l'espace inter-plaques.
4. Son mouvement ultérieur est rectiligne et uniforme puisqu'aucune force n'est exercée sur lui. Il continue selon une direction faisant le même angle α_S.
   Sur l'écran situé à une distance D aprés C, l'ordonnée de l'impact est en $\boxed{y_D = D\tan(\alpha_S) = \dfrac{eELD}{mv_0^2} = 8{,}7\,\mathrm{cm}}$.
5. La trajectoire est rectiligne si la force de Lorentz s'annule. Il faut donc $\vec{E} = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$. Il faut exercer un champ magnétique dans la direction perpendiculaire au plan du schéma : $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Alors $-\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = -v_0\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z = v_0B\vec{e}_y$. Puisque $\vec{E} = -E\vec{e}_y$, il faut que $B = -\dfrac{E}{v_0}$. C'est-à-dire que le champ doit rentrer dans la feuille et avoir une intensité $\boxed{|B| = \dfrac{E}{v_0} = 6{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}}$.

Exercice 3. Cyclotron

1. Le champ électrique est dirigé perpendiculairement aux plaques, donc le proton est accéléré de sorte que son vecteur vitesse est perpendiculaire à la plaque lorsqu'il entre dans le D.
   L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + qV$ se conserve lors du mouvement. En supposant que la tension reste constante et égale à $-U$ lors de la première traversée de A_0 à A_1, un bilan d'énergie donne $qV(A_0) = \dfrac{1}{2}mv_1^2 + qV(A_1)$. On a donc $\dfrac{1}{2}mv_1^2 = q(V(A_0) - V(A_1)) = -qu = qU$. Pour conclure $\boxed{v_1 = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}} = 4{,}4 \times 10^6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.
2. Dans un champ magnétique uniforme dirigé perpendiculairement au vecteur vitesse, le mouvement est circulaire et uniforme dans le sens horaire (relativement à $\vec{B}$). Son rayon est $R = \dfrac{v}{\omega_c}$ où $\boxed{\omega_c = \dfrac{eB}{m_P}}$.
   Le proton parcourt un demi-cercle de longueur πR. La durée du parcours est

$\boxed{\tau = \dfrac{\pi R}{v} = \dfrac{\pi}{\omega_c}}$. Puisque ω_c est une constante, ce résultat ne dépend pas de la vitesse.

3. La tension doit changer de signe à chaque passage entre les Ds afin de pouvoir accélérer les protons. La période doit donc correspondre à 2τ d'où une fréquence $\boxed{f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = 24\,\text{MHz}}$.

4. L'énergie finale des électron doit être $\mathcal{E}_c = 20\,\text{MeV} = 3{,}2 \times 10^{-12}\,\text{J}$.

   Leur vitesse finale doit donc être : $v = \sqrt{\dfrac{2E_c}{m}} = 6{,}2 \times 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

   Le rayon final des trajectoires, donc du cyclotron, est alors $\boxed{R = \dfrac{v}{\omega_c} = 0{,}41\,\text{m}}$.

   Remarque : on a supposé que la vitesse reste non relativiste, ce qui n'est pas le cas. En faisant une étude relativiste, le résultat serait néanmoins le même au centimètre près.

Exercice 4. Diffusion de Rutherford

1. La force électrostatique exercée par le noyau en O (de charge $q_O = Ze$ sur la particule α en M (de charge $q_M = 2e$) a pour expression :

$$\boxed{\vec{F}_{O/M} = \frac{q_O q_M}{4\pi\varepsilon_0 OM^2}\vec{u}_{OM} = \frac{2ZK}{r^2}\vec{e}_r}$$

2. Cette force est centrale donc le moment cinétique de la particule α par rapport à O se conserve.

   À un instant quelconque, $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ d'où $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}) = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z = mC\,\vec{e}_z$.
   Initialement, $\overrightarrow{OM} = X\vec{e}_x + b\vec{e}_y$, où $X \to -\infty$ et $\vec{v} = v_0\,vex$ donc $\vec{L}_0 = -mbv_0\,\vec{e}_z$.

   Par conservation il vient $\boxed{C = -bv_0}$.

3. La force électrostatique est conservative et associée à l'énergie potentielle $\boxed{\mathcal{E}_p(r) = \dfrac{2ZK}{r}}$.

   En effet, $-\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_p(r) = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = \dfrac{2ZK}{r^2}\vec{e}_r = \vec{F}_{O/M}$.

   Puisque c'est la seule force qui travaille, l'énergie mécanique de la particule α se conserve en vertu du théorème de l'énergie mécanique.

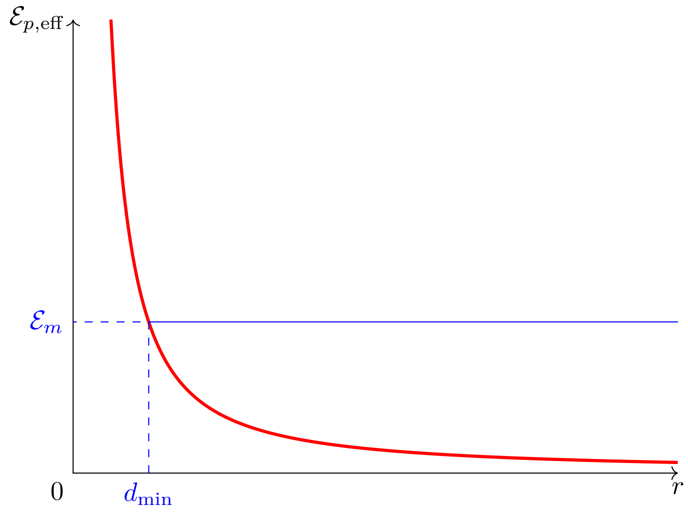
   L'énergie cinétique est $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}m\vec{v}^2 = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$.

   Or, $\dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2}$ si bien que $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2}$.

   L'énergie mécanique s'écrit alors $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}m\dfrac{C^2}{r^2} + \dfrac{2ZK}{r}$.
   On identifie l'énergie potentielle effective :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{2ZK}{r}}$$

   Cette fonction est strictement décroissante, il n'y a donc pas de puits de potentiel qui permettrait à la particule d'être dans un état lié : la particule α est donc dans un état de diffusion, elle repart à l'infini après son passage à proximité du noyau d'or.



4. En négligeant les effets relativistes, l'énergie mécanique est égale à l'énergie cinétique initiale $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ d'où $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}_m}{m}} = 1{,}6 \times 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$.
   $v_0/c \approx 5 \times 10^{-2} < 1/10$ ce qui est cohérent avec l'hypothèse non-relativiste.

5. Dans le cas d'un choc frontal $C = 0$ et $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{2ZK}{r}$.
   La distance minimale d'approche correspond à $\dot{r} = 0$ soit $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(d_{\text{min}})$.
   Il vient $\boxed{d_{\text{min}} = \dfrac{2ZK}{\mathcal{E}_m} = 4{,}6 \times 10^{-14}\,\text{m}}$, ce qui n'est qu'à quelques rayons nucléaires du noyau d'or.

Exercice 5. Modèle planétaire de l'atome

1. La force exercée par le proton sur l'électron a pour expression $\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$ où $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire radial.

   L'énergie potentielle associée est : $\boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$.
2. Cette force est centrale de centre O. Les autres forces étant négligeables, on en déduit que le moment cinétique de l'électron relativement à O se conserve donc que son mouvement se produit dans un plan contenant O.
3. La vitesse pour un mouvement circulaire de rayon r en coordonnées polaires s'écrit $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $v^2 = r^2\dot{\theta}^2$.

   L'accélération vaut $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.

   Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel lié au proton, $\vec{F} = m_e\vec{a}$, donne l'expression de la vitesse v en projetant sur $\vec{e}_r$:

$$m_e\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}} = 2{,}19 \times 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

   On en déduit l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ soit $\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -2{,}18 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = -13{,}6\,\mathrm{eV}}$.
4. Le rayonnement électromagétique produit par l'électron se traduit par une diminution de son énergie mécanique. En supposant l'expression obtenue pour un mouvement circulaire toujours valable, on en déduit que le rayon r de la trajectoire diminue.
5. L'accélération de l'électron est $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_e} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^2}\vec{e}_r$ d'où une puissance émise $\boxed{\mathcal{P} = \frac{2e^6}{3(4\pi\varepsilon_0 c)^3 m_e^2 r^4}}$.

   On peut définir un temps caractéristique par le rapport $\boxed{\tau = \frac{|\mathcal{E}_m|}{\mathcal{P}}(t=0) = \frac{12\pi^2\varepsilon_0^2 c^3 m_e^2 a_0^3}{e^4} = 47\,\mathrm{ps}}$.

   Ce phénomène est extrêmement rapide (et même s'accélère lorsque r diminue) et provoque l'écrasement de l'électron sur le noyau. Le modèle de Rutherford n'est donc pas satisfaisant. Seule la mécanique quantique est à même d'expliquer la stabilité des atomes.