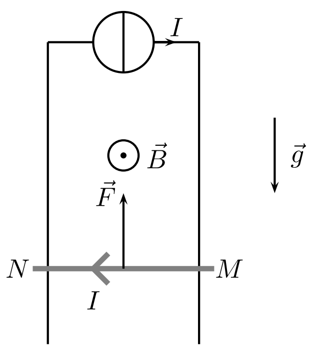
Exercice 1. Oscillations d'une boussole

1. Le poids et la réaction de la pointe exercées sur l'aiguille aimantée, dont les droites d'action sont confondues avec l'axe de rotation, ont un moment nul par rapport à cet axe. En présence du champ magnétique, elle est aussi soumise à son action caractérisée par son couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$.
   En notant θ l'angle entre l'aiguille et $\vec{e}_x$ dans le plan horizontal, $\vec{\mu} = \mu(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)$. Donc $\vec{\Gamma} = -B_0\mu\sin\theta\vec{e}_z$.
   D'après le théorème scalaire du moment cinétique appliqué à l'aiguille aimantée, $J\ddot{\theta} = \vec{\Gamma}\cdot\vec{e}_z = -B_0\mu\sin\theta$ soit : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{B_0\mu}{J}\sin\theta = 0}$.
2. C'est la même équation que celle d'un pendule. Le mouvement est un mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre $\theta = 0$, qui est harmonique dans le cas de petites oscillations. La pulsation propre est alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{B_0\mu}{J}}$ donc la pulsation propre $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{B_0\mu}}}$.

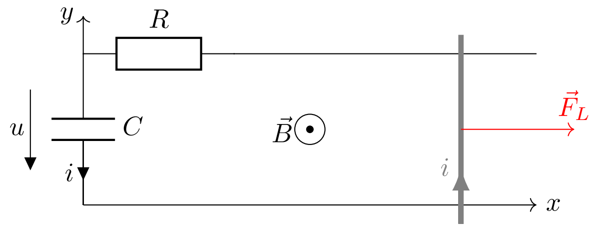
Exercice 2. Rails de Laplace verticaux



1. On utilise l'expression de la force de Laplace : $\vec{F}_L = I\overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}$ où M et N sont les points de contact de la tige avec les rails.
   Si on souhaite $\vec{F}_L$ dirigé selon $\vec{e}_z$ (verticale ascendante) tandis que $\vec{B}$ est dirigé suivant $\vec{e}_x$ (horizontale qui sort de la feuille), il faut que $\overrightarrow{MN}$ soit dirigé suivant $-\vec{e}_y$, c'est-à-dire vers la gauche sur le schéma. On a alors $\overrightarrow{MN} = -d\vec{e}_y$ et $\vec{F}_L = IdB\vec{e}_z$.
2. La tige est aussi soumise à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.
   Il y a équilibre si la résultante des forces s'annule, soit $\vec{F}_L + \vec{P} = \vec{0}$.
   On en déduit $\boxed{I = \frac{mg}{dB} = 20\,\mathrm{A}}$ (ce qui fait beaucoup).
   L'équilibre n'est pas stable car les forces se compensent tout le temps. Si la tige est écartée de sa position elle conserve un mouvement rectiligne et uniforme et ne revient pas en place.
3. Il faut que le champ devienne plus intense en dessous de la position d'équilibre pour l'emporter sur le poids et ramener la tige vers le haut. Il faut aussi qu'il soit moins intense au dessus, afin que le poids l'emporte et la ramène vers le bas. Ainsi le champ magnétique doit diminuer avec l'altitude.

Exercice 3. Rails de Laplace avec circuit RC

1. Le condensateur va se décharger dans le circuit, ce qui produit un courant dans la tige qui va subir alors une force de Laplace qui va la mettre en mouvement.
2. En orientant le courant de sorte que le condensateur soit en convention générateur, $i = -C\dot{u}$. Ce courant circule dans le sens de $\vec{e}_y$ dans la tige donc la force de Laplace $\boxed{\vec{F}_L = id\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = idB\vec{e}_x = -CdB\dot{u}\vec{e}_x}$.



   Les forces exercées sur la tige sont le poids et la réaction normale des rails (forces verticales qui se compensent) et la force de Laplace. D'après la deuxième loi de Newton, $\vec{F}_L = m\vec{a}$. En projectant sur $\vec{e}_x$, on obtient $-CdB\dot{u} = m\dot{v}$.
   On intègre entre $t = 0$ et t : $-CdB(u(t) - u(0)) = m(v(t) - v(0))$.
   Avec les conditions initiales $u(0) = U_0$ et $v(0) = 0$ il vient $\boxed{mv = CdB(U_0 - u)}$.
3. La vitesse augmente au fur et à mesure de la décharge du condensateur. Lorsque le condensateur est entièrement déchargé, $u = 0$ donc la vitesse maximale atteinte est $\boxed{v_{\max} = \frac{CdBU_0}{m}}$.

Exercice 4. Action mécanique sur un cadre

1. Le moment du poids est $\vec{\mathcal{M}}(\vec{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = (b/2)mg\sin(-\theta)\vec{u}_\Delta$ donc $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -(1/2)mgb\sin(\theta)$.

   Le couple des forces de Laplace $\vec{F}_L$ est $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = i\vec{S} \wedge \vec{B} = iabB\sin(\pi/2-\theta)\vec{u}_\Delta$ donc $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_L) = iabB\cos(\theta)$.

   À l'équilibre les moments des forces se compensent soit $-(1/2)mgb\sin(\theta) + iabB\cos(\theta) = 0$ donc $\sin(\theta) = 0$. Les positions d'équilibre sont telles que $\boxed{\tan(\theta_0) = \dfrac{2iaB}{mg}}$.

   Il y a deux positions d'équilibre : une où $\theta_0 \in [0;\pi/2]$, l'autre qui est son symétrique par rapport à Δ.

2. D'après le TMC par rapport à l'axe Δ, $J\ddot{\theta} = -(1/2)mgb\sin(\theta) + iabB\cos(\theta)$.

   Pour $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ où $\varepsilon \ll 1$, au premier ordre $\sin(\theta) = \sin(\theta_0) + \varepsilon\cos(\theta_0)$ et $\cos(\theta) = \cos(\theta_0) - \varepsilon\sin(\theta)$.

   Ainsi $J\ddot{\varepsilon} = \underbrace{-(1/2)mgb\sin(\theta_0) + iabB\cos(\theta_0)}_{=0} - \varepsilon\left(\dfrac{1}{2}mgb\cos(\theta_0) + iabB\sin(\theta_0)\right)$.

   Pour qu'une position d'équilibre soit stable il faut que les signes de $\ddot{\varepsilon}$ et de ε soient opposés. C'est ici le cas pour la position d'équilibre comprise entre 0 et $\pi/2$, mais pas pour l'autre, qui est donc instable.

3. On met l'équation différentielle sous la forme : $\ddot{\varepsilon} + \dfrac{\frac{1}{2}mgb\cos(\theta_0) + iabB\sin(\theta_0)}{J}\varepsilon$.

   C'est l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique, de période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2J}{mgb\cos(\theta_0) + 2iabB\sin(\theta_0)}}}$.