

# DS 9, Durée 2h30, calculatrices... téléphones ...etc ... interdits.

## Exercice 1

Étudier la nature de la série (on précisera si la série est absolument convergente ou pas et si elle est convergente ou pas) :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}} \right)$$

## Exercice 2

On considère  $E$  l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$  des matrices de taille 2 (2 lignes, 2 colonnes) à coefficients réels muni de sa base canonique  $can = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ .

Pour rappel :

- $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Si  $A$  est une matrice de  $E$  :  $\text{Tr}(A)$  est la somme des éléments sur la diagonale de  $A$ .
- Si  $A$  est une matrice de  $E$  :  $A^T$  est la transposée de ma matrice  $A$ .

On pose, si  $A$  et  $B$  sont 2 matrices de  $E$  :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T \cdot B)$$

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

*La structure euclidienne utilisée pour la suite cet exercice est celle donnée par ce produit scalaire et on note  $d$  la distance associée.*

2. Vérifier que  $can$  est une base orthonormale de  $E$ .

3. On note  $I_2$  la matrice identité de  $E$  et  $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $\alpha = d(N, \text{Vect}(I_2))$ .

*On justifiera (bien entendu ...) la valeur proposée.*

4. On note  $Sym$  l'ensemble des matrices *symétriques* de  $E$  (c'est à dire des matrices  $A$  de  $E$  tel  $A^T = A$ ).

(a) Justifier rapidement que  $Sym$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

(b) Déterminer la dimension de l'espace  $Sym$ . En donner une base orthogonale.

(c) Identifier l'espace  $Sym^\perp$ .

(d) Déterminer  $P$  la matrice dans la base  $can$  de la projection orthogonale sur  $Sym$ .

(e) En reprenant la matrice  $N$  de la question 3, déterminer  $d(N, Sym)$  et  $d(N, Sym^\perp)$ . *On justifiera les valeurs proposées.*

# Problème

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

## Partie A : Intégrales de Wallis

1. Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive et décroissante.
2. Montrer (on pourra procéder par intégrations par parties) que, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

3. En déduire que pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$ .

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ .

4. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et déterminer sa valeur.
5. En déduire que pour  $n \rightarrow \infty$  :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

## Partie B : Intégrale de Gauss

6. Montrer que pour  $x \in ]-1, +\infty[$ , on a :

$$\ln(x+1) \leq x$$

7. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq t \leq \sqrt{n}$  :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

8. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par le changement de variable  $t = \sqrt{n} \cos(u)$  montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

9. De même, en posant  $t = \frac{\sqrt{n} \cos(u)}{\sin(u)}$ , montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u) du$$

10. Conclure en donnant la limite de la suite :  $u_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$

Cette limite est notée :  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et est appelée **intégrale de Gauss**