

## DS 9, Durée 2h30, calculatrices... téléphones et autres interdits.

### Exercice 1

$$\left| \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}} \right) \right| \sim 1/n$$

Il n'y a pas absolue convergence.

$$\ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+2)}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + O(1/n^2)$$

D'où avec le théorème des séries alternées la semi-convergence.

### Exercice 2

On considère  $E$  l'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_2[\mathbb{R}]$  des matrices de taille 2 (2 lignes, 2 colonnes) à coefficients réels muni de sa base canonique  $can = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ .

On pose, si  $A$  et  $B$  sont 2 matrices de  $E$  :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T . B)$$

1. Calcul à faire.
2.  $can$  est une base orthonormale de  $E$  Calcul à faire.
3. On note  $I_2$  la matrice identité de  $E$  et  $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

En utilisant les formules du cours :

$$\alpha^2 = d(N, \text{Vect}(I_2))^2 = \|N\|^2 - \frac{\langle N, I_2 \rangle^2}{\|I_2\|^2} = \frac{35}{2}$$

4. On note  $Sym$  l'ensemble des matrices *symétriques* de  $E$  (c'est à dire des matrices  $A$  de  $E$  tel  $A^T = A$ ).
  - (a)  $Sym$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .
  - (b)  $\dim(Sym) = 3$ . Base orthogonale :  $(E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{22})$
  - (c)  $Sym^\perp = \text{Vect}(E_{12} - E_{21})$ .
  - (d)  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
  - (e)  $d(N, Sym)^2 = \frac{1}{2}$  et  $d(N, Sym^\perp)^2 = \frac{59}{2}$ .

# Problème

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$$

## Partie A : Intégrales de Wallis

1. La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive et décroissante car  $\sin(t) \in [0, 1]$  pour  $t \in [0, \pi/2]$ .
2. Par intégration par parties faite en classe (écire  $\sin n + 2 = \sin(x) * \sin^{n+1}(x)$ , intégrer  $\sin(x)$ , dériver  $\sin^{n+1}(x)$ ) : pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

3. Sachant que la suite  $W_n$  est décroissante pour

$$n \in \mathbb{N}$$

:

$$1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+2}{n+1}$$

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ .

4. A l'aide de la première relation : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et vaut :  $u_0 = W_0W_1 = \pi/2$ .
5. Pour  $n \rightarrow \infty$  : On remarque d'abord que  $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n \sim W_n$  puis par décroissance de la suite :  $W_{n+2} \sim W_{n+1} \sim W_n$

$$(n+1)W_{n+1}W_n = \pi/2 \sim nW_n^2$$

$$\text{Ainsi : } W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

## Partie B : Intégrale de Gauss

6. Par concavité de  $\ln$  : pour  $x \in ]-1, +\infty[$ , on a :

$$\ln(x+1) \leq x$$

7. En prenant le  $\ln$  des termes : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq t \leq \sqrt{n}$  :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

8. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , par le changement de variable  $t = \sqrt{n} \cos(u)$  :  $dt = -\sqrt{n} \sin(u)$ , on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2(u))^n (-\sin(u)) du = W_{2n+1}$$

9. De même, en posant  $t = \frac{\sqrt{n} \cos(u)}{\sin(u)}$  ;  $dt = \frac{-\sqrt{n}}{\sin^2(u)}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_{\pi/2}^{\pi/4} \left(1 + \frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)}\right)^{-n} \frac{-\sqrt{n}}{\sin^2(u)} du = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u) du$$

10. Par intégration de l'inégalité de la question 7 :  
pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u) du = \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Pour  $n \rightarrow \infty$  :

$$u_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$