Fiche 75 : TD du 28-05.

Exercice

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré au plus 2 à coefficients réels et $Can = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
On pose pour P et Q dans E :

$$< P, Q >= P(1).Q(1) + P'(1).Q'(1) + P^{(2)}(1).Q^{(2)}(1)$$

1. Vérifier qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance de $X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tel que $P(1) = 0$.
   (a) Vérifier que H est un sous espace de E. Quel est sa dimension ?
   (b) Soit ϕ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice P de ϕ dans la base Can.

Problème 1

1. Pour quelles valeurs de x réel la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^k$ est elle convergente ? Donner la valeur de la somme en fonction de x quand il y a convergence.
2. Pour quelles valeurs de x réel la série $\sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ est elle convergente (on précisera bien les résultats du cours utilisés ici) ?

L'objet des questions suivantes est de calculer la somme de cette série dans les cas de convergence et d'évaluer la vitesse de convergence.

3. Montrer, en utilisant la formule de la série géométrique et une intégration, que si $x > -1$ et n est un entier non nul :
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n dt}{1+t}$$
4. Pour $0 \leq x \leq 1$, montrer que
$$\left|\int_0^x (-1)^n \frac{t^n dt}{1+t}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
   En déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$
5. Pour $-1 < x \leq 0$, calculer de même la somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

On a ainsi $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

6. La série précédente est elle absolument convergente ?

On pose, pour p entier naturel

$$R_p = \sum_{k=2p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

7. D'après le cours, que peut-on dire de la suite $(R_p)_{p\in\mathbb{N}}$?
8. Montrer que si $p \leq N$:
$$\sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+2)^2} \leq \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leq \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}$$
   En déduire que
$$\int_p^{N+1} \frac{dx}{(2x+2)^2} \leq \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} \leq \int_{p-1}^{N} \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

9. Montrer par ailleurs que :

$$R_p = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=p}^{N} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

10. Conclure finalement que si p est un entier naturel non nul :

$$\frac{1}{4p+2} \leq R_p \leq \frac{1}{4p-2}$$

et donner un équivalent élémentaire de la suite R_p pour $p \to +\infty$.

Problème 2

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique et on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: u_0, u_1, u_2 tel que :
   — La première coordonnée de u_0 est 1 et $A.u_0 = 0$.
   — La deuxième coordonnée de u_1 est 1 et $A.u_1 = u_1$.
   — La première coordonnée de u_2 est 1 et $A.u_2 = 2u_2$.
2. Vérifier que les vecteurs u_0, u_1, u_2 sont orthogonaux 2 à 2 et forment une base de $\mathbb{R}^3$.

On note $e_0 = \frac{1}{\|u_0\|}u_0$,$e_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1$, $e_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2$, B la famille (e_1, e_2, e_3) et P la matrice de passage de la base canonique à la famille B.

3. Écrire la matrice P. De quel type de matrice s'agit-il ? Quelle relation y a-t-il entre P^{-1} et P^T ?
4. Déterminer $D = P^{(-1)}AP$.
5. Vérifier qu'une matrice $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ réelle vérifie $ND = DN$ si et seulement si N est diagonale.
6. Soit M une matrice de taille 3×3 tel que $AM = MA$.
   (a) Montrer que $N = P^{(-1)}MP$ vérifie : $DN = ND$.
   (b) En déduire qu'il existe trois réels (a, b, c) tel que $M = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & b & 0 \\ \frac{c-a}{2} & 0 & \frac{a+c}{2} \end{pmatrix}$
7. Donner l'ensemble des matrices de taille $3{\times}3$ M tel que $AM = MA$. On décrira cette ensemble comme un espace vectoriel dont on explicitera une base.