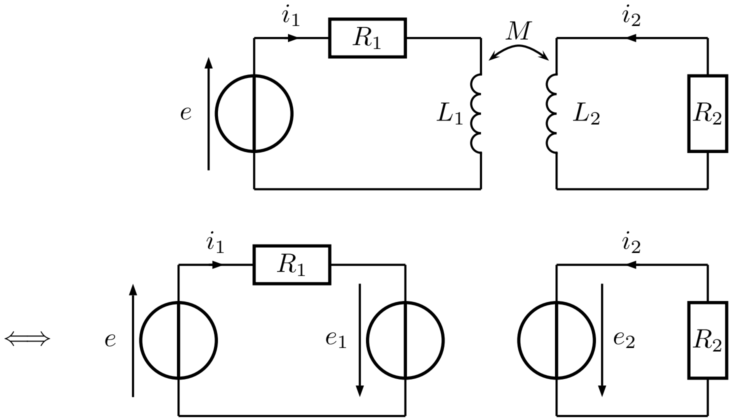
Exercice 1. Étude de circuits couplés



1. Dans le circuit primaire, la loi des mailles donne $e = R_1 i_1 - e_1$ avec la f.é.m. induite $e_1 = -L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{e = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$

   Dans le circuit secondaire, on a $0 = R_2 i_2 - e_2$ avec $e_2 = -L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ donc $\boxed{0 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$.

2. L'équation dans le deuxième circuit devient en complexe : $0 = (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1$ donc $\boxed{\underline{I}_2 = -\dfrac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2}\underline{I}_1}$.

3. En complexe, l'équation dans le premier circuit s'écrit : $E_0 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$. En utilisant le résultat précédent : $E_0 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - \dfrac{(j\omega)^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}\underline{I}_1$.

   On en déduit $\boxed{\underline{I}_1 = \dfrac{R_2 + j\omega L_2}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) - (j\omega)^2 M^2} E_0}$ et $\boxed{\underline{I}_2 = -\dfrac{j\omega M}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) - (j\omega)^2 M^2} E_0}$.

4. À haute fréquence le terme qui domine au dénominateur est en ω^2. On obtient alors $\underline{I}_2 \simeq -\dfrac{j\omega M}{(j\omega)^2 (L_1 L_2 - M^2)} E_0 = -\dfrac{M}{(j\omega)(L_1 L_2 - M^2)} E_0$.

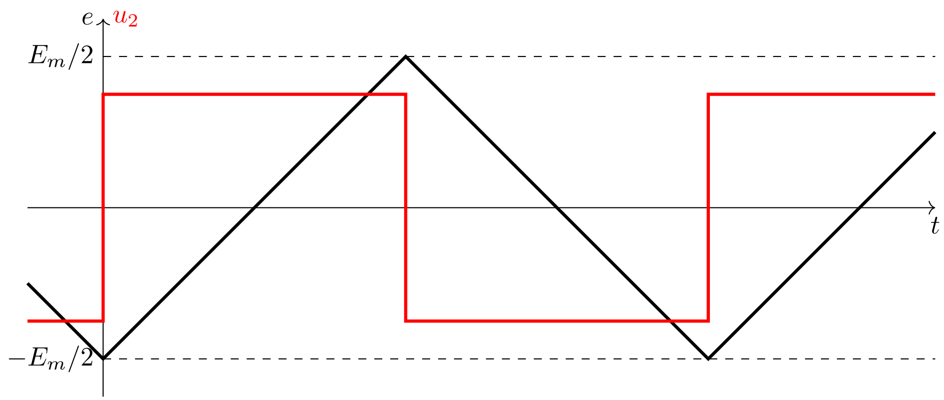
   L'amplitude réelle de i_2 est le module de l'amplitude complexe : $I_2 = |\underline{I}_2| = \dfrac{M}{\omega(L_1 L_2 - M^2)} E_0$ (puisque $M^2 < L_1 L_2$).

   On calcule la dérivée de I_2 : $\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}M} = \dfrac{(L_1 L_2 + M^2)}{\omega(L_1 L_2 - M^2)^2} E_0 > 0$ donc I_2 augmente avec M.

   Si la casserole s'éloigne donc M décroît, I_2 décroît aussi ce qui va limiter l'effet Joule donc le chauffage par induction.

Exercice 2. Mesure d'une inductance mutuelle

1. En posant $i_2 = 0$ dans l'équation obtenue dans l'exercice précédent : $\boxed{e = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$.
2. On remplace par les expressions : $a.t + b = R_1.a'.t + R_1.b' + L_1.a'$. En identifiant les deux membres, on obtient $a = R_1 a'$ et $b = R_1.b' + L_1.a'$. On obtient $\boxed{a' = a/R_1}$ et $\boxed{b' = b/R_1 - a.L_1/R_1^2}$.
3. La tension aux bornes de la deuxième bobine est $u_2 = -e_2 = M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = M.a'$ soit $\boxed{u_2 = Ma/R_1}$.
4. $\boxed{a = \pm\dfrac{2E_m}{T}}$ donc $\boxed{u_2 = \pm\dfrac{2ME_m}{R_1 T}}$.



5. En mesurant la tension u_2 ainsi que E_m et T, on calcule $\boxed{M = \dfrac{u_2 R_1 T}{2E_m}}$.

Exercice 3. Inductance mutuelle entre un fil et une spire

1. Avec l'orientation appropriée, un élément de surface élémentaire est $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}r\mathrm{d}z\vec{e}_\theta$ en utilisant les coordonnées cylindriques.

D'après la règle de la main droite, le champ magnétique vaut $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{e}_\theta$.

Ainsi le flux élémentaire est $\mathrm{d}\phi = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\mathrm{d}r\mathrm{d}z$.

On l'intègre sur $r \in [a, a+b]$ et $z \in [0, b]$ pour obtenir le flux total :

$$\phi = \iint \mathrm{d}\phi = \int_a^{a+b}\left(\int_0^b \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\mathrm{d}z\right) = \int_a^{a+b}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}b\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 i b}{2\pi}[\ln(r)]_a^{a+b}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\phi = \frac{\mu_0 i b}{2\pi}\ln\left(\frac{a+b}{a}\right)}$$

2. $\phi = Mi$ donc $\boxed{M = \dfrac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(\dfrac{a+b}{a}\right) = 8{,}8\times10^{-9}\,\mathrm{H}}$.

3. $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = M\sqrt{2}I_{\text{eff}}\omega\sin(2\pi f t)$ dont la valeur efficace est $\boxed{e_{\text{eff}} = MI_{\text{eff}}2\pi f = 2{,}8\times10^{-5}\,\mathrm{V}}$.

   Ce résultat très faible est difficile à mesurer. Cependant, on peut obtenir une valeur plus grande en multipliant le nombre de spires (ce qui multiplie le flux donc e). C'est le principe d'une pince ampèremétrique, qui consiste en un bobinage torique qui enserre le fil.

Exercice 4. Oscillateurs couplés

1. $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

2. On oriente les circuits 1 et 2 de telle sorte que les condensateurs soient en convention récepteur.

   Ainsi $i_{1,2} = C\dfrac{\mathrm{d}u_{1,2}}{\mathrm{d}t}$. Dans la bobine 1, la f.é.m. induite est $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}L_1 i_1 + M i_2}{\mathrm{d}t} = u_1$ d'où $\boxed{u_1 + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + MC\dfrac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = 0}$.

   De même dans la bobine 2, $e_2 = -\dfrac{\mathrm{d}L_2 i_2 + M i_1}{\mathrm{d}t} = u_2$ d'où $\boxed{u_2 + LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + MC\dfrac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = 0}$.

3. En ajoutant membre à membre les deux équations différentielles on obtient $x + (L+M)C\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$ et en les soustrayant $y + (L-M)C\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

   Les pulsations propres associées sont $\boxed{\omega_x = \dfrac{1}{\sqrt{(L+M)C}} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1+M/L}}}$ et $\boxed{\omega_y = \dfrac{1}{\sqrt{(L-M)C}} = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1-M/L}}}$.

4. Les solutions sont $x(t) = A_x\cos(\omega_x t) + B_x\sin(\omega_x t)$ et $y(t) = A_y\cos(\omega_y t) + B_y\sin(\omega_y t)$.

   C_1 étant initialement chargé et C_2 déchargé, et les courants étant nuls, $x(0) = y(0) = u_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. On en déduit $A_x = A_y = u_0$ et $B_x = B_y = 0$.

   En conclusion $u_1(t) = \dfrac{x+y}{2} = u_0[\cos(\omega_x t) + \cos(\omega_y t)]/2$ soit $\boxed{u_1(t) = u_0\cos[(\omega_x+\omega_y)t/2]\cos[(\omega_y-\omega_x)t/2]}$ et $u_2(t) = \dfrac{x-y}{2} = u_0[\cos(\omega_x t) - \cos(\omega_y t)]/2$ soit $\boxed{u_2(t) = u_0\sin[(\omega_x+\omega_y)t/2]\sin[(\omega_y-\omega_x)t/2]}$.

5. Lorsque $M \ll L$, $\omega_x = \omega_0(1 - M/(2L))$ et $\omega_y = \omega_0(1 + M/(2L))$. Alors $\omega_x + \omega_y = 2\omega_0$ et $\omega_y - \omega_x = \omega_0 M/L$.

   Il vient : $\boxed{u_1(t) = u_0\cos(\omega_0 t)\cos((M/L)\omega_0 t/2)}$ et $\boxed{u_2(t) = u_0\sin(\omega_0 t)\sin((M/L)\omega_0 t/2)}$.

   On obtient des fonctions oscillant à la pulsation ω_0 avec une enveloppe oscillant à la pulsation $(M/L)\omega_0/2$. Autrement dit, on compte $2L/M$ oscillations pour une période de l'enveloppe.

6. On compte 27 oscillations pour une période donc $\boxed{M/L = 2/27}$.

Exercice 5. Freinage par induction

1. Lorsqu'on calcule le flux à travers la spire, seule l'aire située dans la zone où le champ existe contribue : $\phi = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = B_0 a x_C$ où l'on choisit une orientation de la normale de la spire dans le même sens que le champ ($\vec{e}_z$).

   La f.é.m. induite est donc $e = -\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -B_0 a\dot{x}_C$ soit $\boxed{e = -B_0 a v}$.

2. Le courant induit a pour intensité $i = e/R$.

   La résultante des forces de Laplace se limite à celle agissant sur le côté inférieur (elle est nulle sur le côté supérieur et celles sur les côtés latéraux se compensent) :

   $\vec{F}_L = ia\vec{e}_y \wedge B_0\vec{e}_z = iaB_0\vec{e}_x$ soit $\boxed{\vec{F}_L = -\dfrac{(B_0a)^2}{R}v\vec{e}_x}$.

3. Les forces exercées sur la spire sont le poids et les forces de Laplace. Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ s'écrit $m\dot{v} = mg - \dfrac{(B_0a)^2}{R}v$ qui se met sous la forme d'une équation différentielle

du premier ordre pour $v(t)$: $\boxed{\dot{v} + \frac{(B_0 a)^2}{mR} v = g}$.

On identifie le temps caractéristique $\boxed{\tau = \frac{mR}{(B_0 a)^2}}$. Les solutions sont $v(t) = g\tau + \lambda e^{-t/\tau}$. On fixe la constante λ avec la condition initiale : $v(0) = g\tau + \lambda = v_0$.

Pour conclure, $\boxed{v(t) = g\tau + (v_0 - g\tau)e^{-t/\tau}}$.

4. Si $t \ll \tau$ alors $e^{-t/\tau} \simeq 1$ et $v(t) = v_0$: le mouvement est uniforme.

   La durée de la phase est donc $\boxed{t_1 = \frac{a}{v_0}}$.

5. Lorsque la spire se trouve entièrement dans la région où règne le champ magnétique, le flux magnétique est constant donc la force de Laplace disparaît : le cadre se trouve en chute libre et son mouvement est uniformément accéléré.

Exercice 6. Oscillations d'un cadre conducteur

1. Le repère cartésien utilisé est tel que $\Delta = (Oz)$ et $\vec{g} = g\vec{e}_x$. Ainsi θ est l'angle usuel des coordonnées cylindriques.

   On oriente le circuit de sorte que $\vec{n} = \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$. $\vec{B} = -B\vec{e}_x$ donc le flux du champ magnétique à travers le cadre vaut $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bab(-\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_\theta = +Bab\sin(\theta)$.

   La f.é.m. induite est alors $e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -Bab\dot{\theta}\cos(\theta)$ et le courant induit $i = \frac{e}{R} = -\frac{Bab}{R}\dot{\theta}\cos(\theta)$. Le cadre se comporte comme un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu} = iab\vec{n} = -\frac{(Bab)^2}{R}\dot{\theta}\cos(\theta)(\vec{e}_\theta \wedge (-\vec{e}_x)) = -\frac{(Bab)^2}{R}\dot{\theta}\cos^2(\theta)\vec{e}_z$. C'est un terme de type couple de frottement visqueux, conforme à la loi de Lenz.

   On peut maintenant appliquer la loi scalaire du moment cinétique par rapport à Δ : $J\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_L)$ (on considère la liaison pivot parfaite et les frottements de l'air négligeables).

   Le poids a un bras de levier $d = (b/2)\sin(\theta)$ par rapport à Δ et fait tourner le cadre dans le sens opposé à θ donc $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mg(b/2)\sin(\theta)$.

   On obtient alors l'équation différentielle :

$$\boxed{J\ddot{\theta} + \frac{(Bab)^2}{R}\cos^2(\theta)\dot{\theta} + \frac{mgb}{2}\sin(\theta) = 0}$$

2. Pour $\theta \approx 0$, $\sin(\theta) \approx \theta$ et $\cos(\theta) \approx 1$ donc l'équation différentielle de vient linéaire : $\ddot{\theta} + \frac{(Bab)^2}{RJ}\dot{\theta} + \frac{mgb}{2J}\theta = 0$.

   On identifie avec l'équation différentielle d'un oscillateur amorti : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

   La pulsation propre est donc $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb}{2J}}}$ et le facteur de qualité $\boxed{Q = \omega_0 \frac{RJ}{(Bab)^2}}$.

   Les différents régimes des oscillateurs amortis sont possibles selon la valeur de Q : si $Q > 1/2$ régime pseudo-périodique, si $Q = 1/2$ régime critique et si $Q < 1/2$ régime apériodique.

Exercice 7. Haut-parleur électrodynamique

1. Les forces exercées sur la tige sont le poids et la réaction des rails, dirigés sur $\vec{e}_z$, la force de rappel $\vec{F}_r = -kx\vec{e}_x$, la force de frottement visqueux $\vec{F}_f = -\lambda\dot{x}\vec{e}_x$ et la force de Laplace $\vec{F}_L = i\ell\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = i\ell B\vec{e}_x$.

   Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ s'écrit donc $m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + i\ell B$ soit $\boxed{m\ddot{x} + kx + \lambda\dot{x} = i\ell B}$ (EM).

2. $\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = F_L\dot{x}$ soit $\boxed{\mathcal{P}_L = i\ell B\dot{x}}$.

   On sait que $\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_e = 0$ où $\mathcal{P}_e = ei$ donc $\boxed{e = -\ell B\dot{x}}$.

3. Le circuit se compose de deux sources de tension u et e orientées dans le même sens, d'une résistance R et d'une inductance L.

   La loi des mailles donne $u + e = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ soit $\boxed{u - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -e = \ell B\dot{x}}$ (EE).

4. On multiplie l'équation mécanique par $\dot{x}$ pour obtenir $m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} + \lambda\dot{x}^2 = i\ell B\dot{x}$ soit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + \lambda\dot{x}^2 = \mathcal{P}_L$. Les deux premiers termes entre parenthèses sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la tige. L'équation prend donc la forme $\dot{\mathcal{E}}_m + \lambda\dot{x}^2 = \mathcal{P}_L$.

   On multiplie l'équation mécanique par i pour obtenir $ui - Ri^2 - Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -ei$ soit $ui - Ri^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = -\mathcal{P}_e$. On reconnaît dans le terme entre paranthèses l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine donc on peut écrire $\dot{\mathcal{E}}_L + Ri^2 + \mathcal{P}_e = ui$.

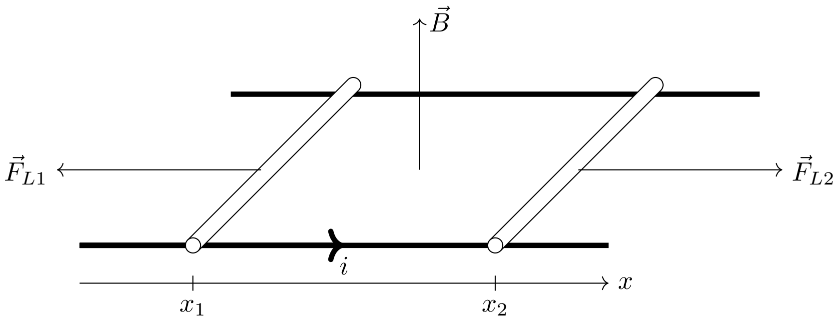
   En ajoutant membre à membre les deux équations obtenues, avec $\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_e = 0$ on obtient :

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}}_m + \dot{\mathcal{E}}_L + Ri^2 + \lambda\dot{x}^2 = ui}$$

   Ainsi, la puissance électrique fournie par la source de tension produit de la puissance mécanique et de la puissance magnétique, et elle est dissipée par effet Joule et par frottements visqueux. C'est ce dernier, qui modélise le couplage avec l'air, qui représente la puissance sonore émise.

5. En régime sinusoïdal forcé, les énergies sont des sinusoïdales au carré et leur dérivée un $\sin(2\omega t)$ dont la moyenne est nulle.
   Il reste donc $< ui > = < Ri^2 > + < \lambda \dot{x}^2 >$.
6. La puissance utile est la puissance sonore et la puissance coûteuse est la puissance électrique fournie. Le rendement est donc défini par le rapport $\boxed{r = \dfrac{< \lambda \dot{x}^2 >}{< ui >}}$.

Exercice 8. Deux tiges en interaction



1. D'après la loi de Lenz,le système réagit de façon à limiter les variations de flux magnétique c'est-à-dire à limiter les variations de l'aire du circuit. Ainsi la barre de gauche va être freinée tandis que celle de droite va être mise en mouvement, les deux barres atteignant une vitesse identique.
2. Le flux magnétique à travers le circuit a pour expression $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Ba(x_2 - x_1)$ donc la f.e.m. induite vaut $e = -\dot{\phi} = -Ba(v_2 - v_1)$ où $v_i = \dot{x}_i$ est la composante de la vitesse de chaque barre le long des rails.
   Le circuit a une résistance totale $2R$ donc le courant qui y circule une intensité $\boxed{i = \dfrac{e}{2R} = \dfrac{Ba}{2R}(v_1 - v_2)}$.
3. Ce courant induit des forces de Laplace :
   — sur la barre 1, $\vec{F}_{L1} = i(-a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = -iaB\vec{e}_x = \dfrac{(Ba)^2}{2R}(v_2 - v_1)\vec{e}_x$;
   — sur la barre 2, $\vec{F}_{L2} = i(a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x = \dfrac{(Ba)^2}{2R}(v_1 - v_2)\vec{e}_x$.
   En plus de cette force, chaque barre est soumise à son poids qui est compensé par la réaction normale des rails. Le PFD projeté sur $\vec{e}_x$ appliqué à chaque barre donne ainsi :
   — pour la barre 1 : $\boxed{m\dot{v}_1 = \dfrac{(Ba)^2}{2R}(v_2 - v_1)}$;
   — pour la barre 2 : $\boxed{m\dot{v}_2 = \dfrac{(Ba)^2}{2R}(v_1 - v_2)}$.
4. En sommant les deux équations membre à membre, on obtient $\dot{\sigma} = 0$. Or $\sigma(0) = v_0$ donc $\sigma(t) = v_0$.
   En soustrayant les deux équations, on obtient : $\dot{\delta} = -\dfrac{(Ba)^2}{Rm}\delta = -\dfrac{\delta}{\tau}$ avec $\tau = \dfrac{Rm}{(Ba)^2}$ le temps caractéristique.
   Avec $\delta(0) = v_0$, on obtient $\delta(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.
   Ainsi :
   $$\boxed{v_1(t) = \frac{\sigma + \delta}{2} = \frac{v_0}{2}\left(1 + e^{-t/\tau}\right)} \qquad \boxed{v_2(t) = \frac{\sigma - \delta}{2} = \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$
   Les deux vitesses tendent exponentiellement avec un temps caractéristique τ vers la vitesse moyenne $v_0/2$.
5. L'énergie cinétique initiale vaut $\mathcal{E}_{ci} = \dfrac{1}{2}mv_0^2$ et l'énergie cinétique finale $\mathcal{E}_{cf} = 2 \times \dfrac{1}{2}m(v_0/2)^2 = \dfrac{1}{4}mv_0^2$. Il y a donc une perte d'énergie mécanique de $\boxed{|\mathcal{E}_{ci} - \mathcal{E}_{cf}| = \dfrac{1}{4}mv_0^2}$.
   L'intensité du courant vaut $i(t) = \dfrac{Ba}{2R}\delta(t) = \dfrac{Ba}{2R}v_0 e^{-t/\tau}$ donc la puissance dissipée par effet Joule vaut $\mathcal{P}_J = 2 \times Ri^2 = 2R\dfrac{(Ba)^2}{4R^2}v_0^2 e^{-2t/\tau} = \dfrac{mv_0^2}{2\tau}e^{-2t/\tau}$. On en déduit l'énergie dissipée par effet Joule : $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \mathcal{P}_J \mathrm{d}t = \frac{1}{4}mv_0^2}$.
   On vérifie ainsi la conservation de l'énergie totale, due à la conversion d'énergie mécanique en énergie électrique.