Fiche 76 : Probabilités.

Exercice 1

$N \in \mathbb{N}$ est fixé
On dispose de $(N+1)$ urnes, numérotées de 0 à N . L'urne k contient k boules rouges et $(N-k)$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule rouge sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 2

X_1 et X_2 sont (les variables aléatoires correspondant à) deux dés à 6 faces non pipés indépendants et Y est leur min, Z leur max.

1. Déterminer pour $x \geq 1$: $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$. En déduire la loi de Z.
2. Procéder de même pour déterminer la loi de Y.
3. Y et Z sont-ils indépendants ?

Exercice 3 : Fonction génératrice

On considère X une variable à valeurs entières sur un univers fini Ω.
On pose, si s est réel :

$$g_X(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s^n \mathbb{P}(X = n)$$

g est la **fonction génératrice** de la variable X.

1. Montrer que la somme précédente est finie et définit donc un polynôme.
2. Montrer que si n est entier :
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} g_X^{(n)}(0)$$
3. Montrer que si n est entier :
$$\mathbb{E}(X) = g_X'(1)$$
4. Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Bernoulli : $B(p)$, $p \in]0, 1[$.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires entières et indépendantes alors
$$g_{X+Y} = g_X g_Y$$
6. Déterminer la fonction génératrice d'une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
7. Déterminer la fonction génératrice de la somme de 2 variables indépendantes de lois uniformes sur $[\![1, 6]\!]$.
8. On considère des dés non pipés à 6 faces X_1' et X_2' mais dont les faces sont numérotées respectivement : $1, 2, 2, 3, 3, 4$ et et $1, 3, 4, 5, 6, 8$. Quelles sont les lois et les fonctions génératrices des variables aléatoires X_1', X_2' et $X_1' + X_2'$.

Exercice 4 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On étudie une marche aléatoire sur l'axe réel.
Pour $t = 0$, la particule est au point O d'abscisse nulle et pour chaque unité de temps (indépendamment des déplacements précédents) :

— l'abscisse de la particule augmente de 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
— l'abscisse de la particule diminue de 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k = 1$ si on se déplace vers la droite et $X_k = -1$ sinon.
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note S_n la variable aléatoire représentant l'abscisse de la particule au temps $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$: donner la loi de X_k, son espérance et sa variance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ relier S_{2n} aux variables (X_k) en déduire sa loi, son espérance, sa variance (On remarquera que S_{2n} est un entier pair).
3. Pour n et m entiers non nuls, déterminer $\text{cov}(S_n, S_{n+m})$, Les variables S_n et S_m sont-elles indépendantes ?