
Fiche 77.

Exercice 1

On considère un espace probabilisé fini Ω sans évènement non vide à probabilité nulle et sur celui-ci l'espace vectoriel des variables aléatoires $E = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant, si X et Y sont dans E :

$$(X, Y) = \mathbb{E}(X \times Y)$$

2. Déterminer la projection orthogonale de E sur \mathbb{R} (ensemble des variables aléatoires constantes sur Ω)
3. Si X est dans E , déterminer la distance entre X et \mathbb{R} . Comment s'appelle usuellement cette distance ?
4. Soit Y une variable aléatoire non constante sur Ω , déterminer la projection orthogonale de l'espace E sur l'espace $\text{Vect}(1, Y)$.

Exercice 2

Soit U et V deux variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$. On pose $X = U - V$ et $Y = U + V$. Déterminer la covariance entre X et Y .