Chapitre P23

Ondes progressives

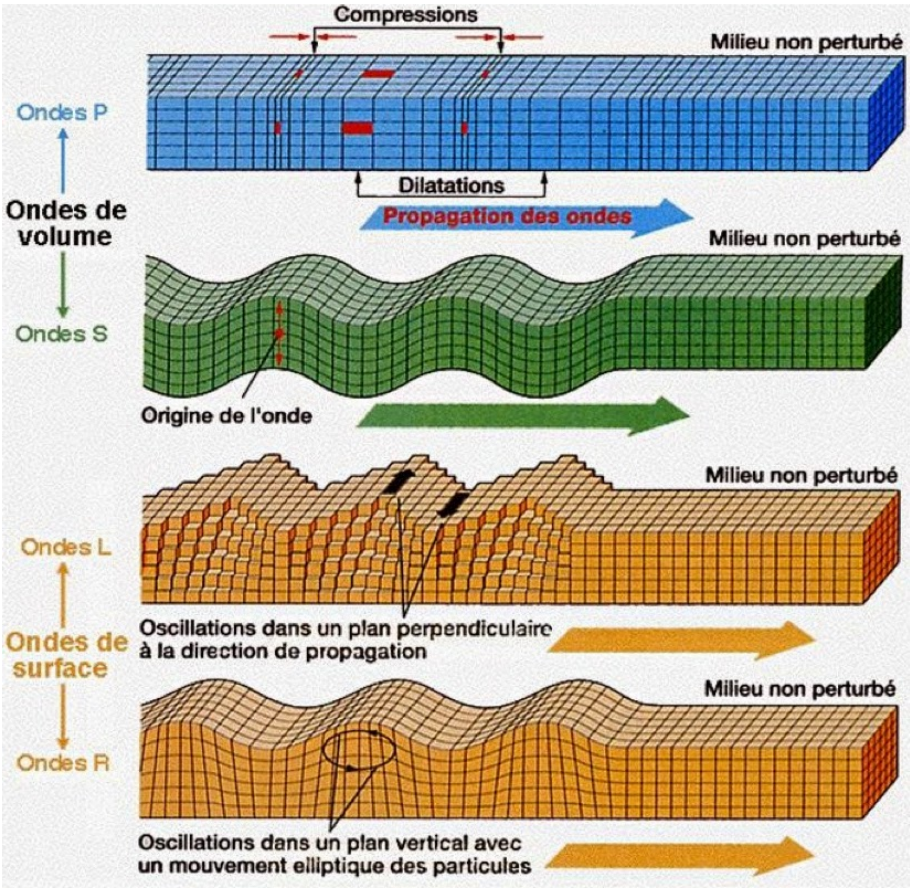
Notions et contenus	Capacités exigibles
Exemples de signaux. Signal sinusoïdal.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	Écrire les signaux sous la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$. Écrire les signaux sous la forme $f(t-x/c)$ ou $g(t+x/c)$. Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique. Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase. Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation. *Capacité expérimentale : mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.*
Milieux dispersifs ou non dispersifs.	Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.

Questions de cours

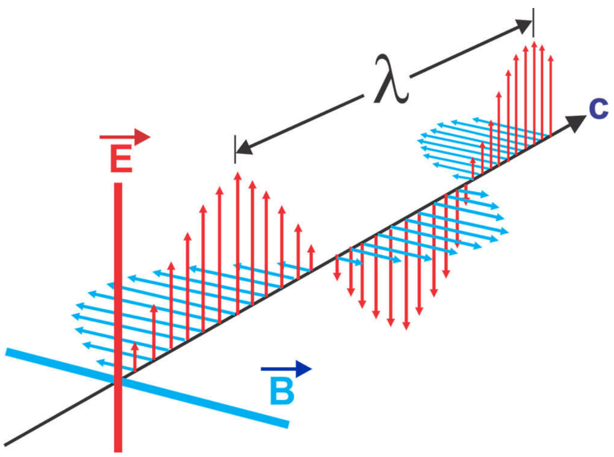
- Définir une onde progressive. Donner des exemples.
- Définir la célérité d'une onde et citer des ordres de grandeur.
- Donner en les justifiant les formes mathématiques générales d'une onde en propagation unidimensionnelle.
- Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique ou électromagnétique.
- Définir la vitesse de phase d'une onde sinusoïdale et en déduire la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase.
- Définir un milieu dispersif. Indiquer les conséquences sur la propagation d'une onde.

Document 1. Onde acoustique

Document 2. Onde sismique

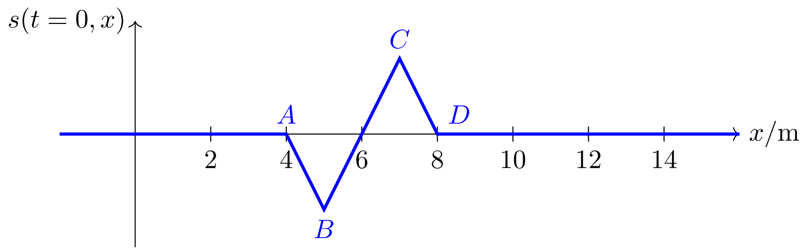


Document 3. Onde électromagnétique



Exercice de cours A. Représentations spatiale et temporelle

Soit une onde se propageant à la célérité $c = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ dans le sens des x croissants. La perturbation $s(t,x)$ est représentée est représenté ci-dessous à $t = 0$ en fonction de la position.

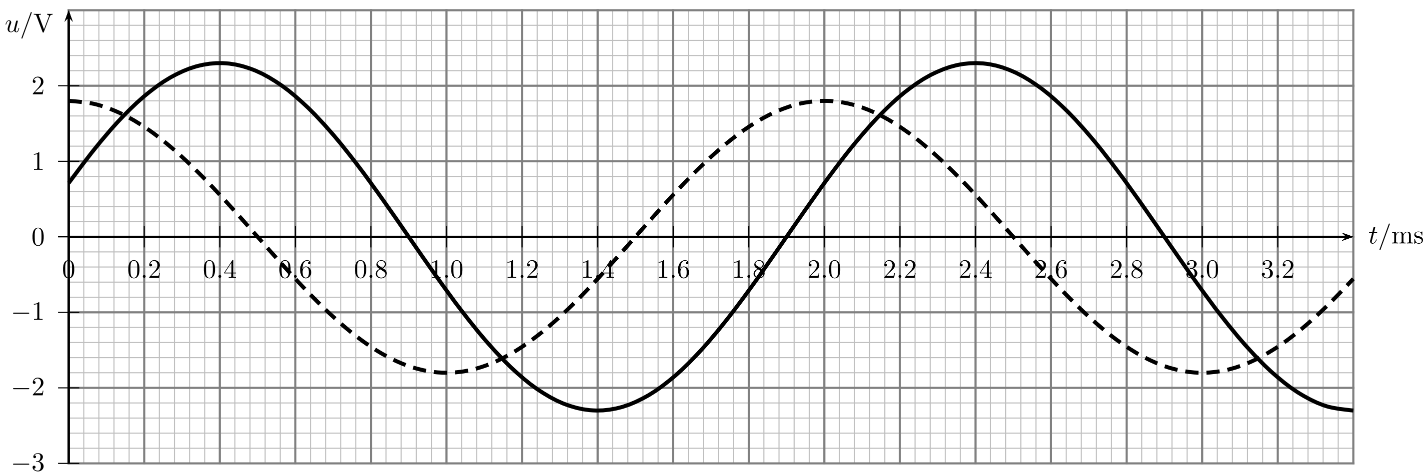


1. Déterminer à quels instants les états A, B, C et D de la perturbation sont ressentis au point d'abscisse $x_0 = 10\,\mathrm{m}$.
2. En déduire l'évolution $s(t,x_0)$ du signal perçu en $x_0 = 10\,\mathrm{m}$ en fonction du temps.

Exercice de cours B. Propagation du son

Un haut-parleur situé en O émet une onde de pression sinusoïdale dans une unique direction (sur l'axe Ox dans le sens des x croissants) : $p(x,t) = P_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$.

On place deux microphones identiques sur cet axe aux positions x_1 et x_2. On reproduit ci-dessous le signal en sortie des microphones (microphone 1 en traits pleins, microphone 2 en traits pointillés).



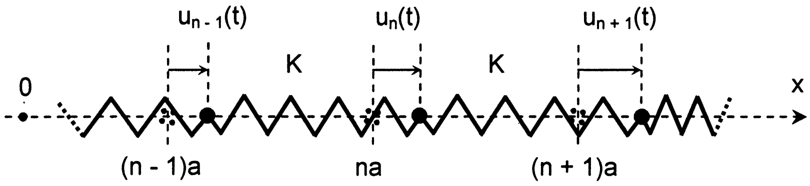
Donnée : vitesse du son $c = 340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

1. Déterminer la période des signaux. En déduire la fréquence et la longueur d'onde de l'onde émise.
2. Comparer les amplitudes des deux signaux. Que cela suggère-t-il sur l'ordre dans lequel sont placés les microphones ?
3. Déterminer graphiquement le déphasage du signal du microphone 2 par rapport au signal du microphone 1.
4. Proposer alors les trois plus petites valeurs possibles de distance entre les deux microphones.

Exercice de cours C. Modèle microscopique d'une onde élastique

À l'échelle microscopique, un matériau solide homogène peut être modélisé par une chaîne infinie d'atomes assimilés à des points matériels de même masse m et reliés entre eux par des ressorts identiques, de longueur à vide a et de raideur K. Ces ressorts modélisent, dans l'approximation linéaire, les interactions électromagnétiques entre les atomes lorsqu'ils se déplacent au voisinage de leur position d'équilibre.

Considérons un modèle unidimensionnel dans lequel tous les atomes se déplacent sans frottement sur un axe Ox. La figure ci-dessous représente cette disposition où chaque atome est numéroté par un entier n. Lorsqu'il est en équilibre mécanique, l'atome référencé (n) est situé à l'abscisse $x_n = n\,a$; en dehors de l'équilibre, sa position devient $x_n + u_n(t)$ avec $|u_n| \ll a$.



1. Etablir l'expression de la résultante des forces exercées par les atomes $(n-1)$ et $(n+1)$ sur l'atome (n).
2. En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'atome (n) et montrer qu'elle peut d'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), \qquad (1)$$

   en explicitant ω_0 en fonction de K et m.
3. On veut montrer qu'une onde élastique longitudinale de pulsation ω, de vecteur d'onde k peut se propager le long de la chaîne, en induisant un déplacement longitudinal de l'atome (n) sous la forme :

$$\underline{u}_n = A e^{i(k\,x_n - \omega t)}$$

   où A est une constante, indépendante de n et de t. Qualifier cette onde le plus précisément possible.
4. Vérifier que l'équation proposée est bien solution de l'équation différentielle, à condition que k, ω, ω_0 et a soient reliés par une équation à expliciter, dite relation de dispersion.
5. Montrer quil existe une pulsation maximale ω_M des ondes pouvant se propager dans ce milieu.
6. Préciser la relation existant entre u_{n+1} et u_n pour $\omega = \omega_M$. Décrire alors le mouvement relatif des atomes.
7. Donner l'expression de la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ?
8. Que devient cette vitesse lorsque $ka \ll 1$? Commenter.

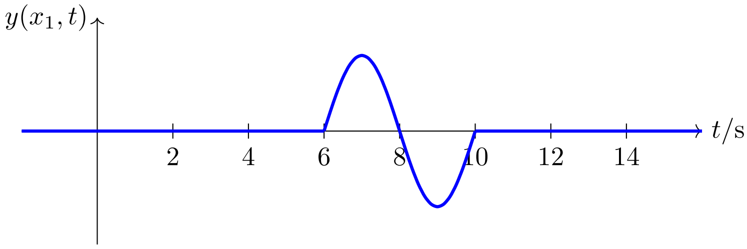
   Cette situation,dans laquelle la distance entre atomes a est très petite devant la longueur d'onde des ondes élastiques étudiées, constitue l'« approximation des milieux continus ».
   Dans cette approximation, le déplacement u_n de l'atome (n), situé en $x = na$ au repos, peut être remplacé par une fonction continue $u(x,t)$ où la variable x représente la position de cet atome au repos.
9. Écrire $u_{n-1}(t)$ et $u_{n+1}(t)$ sous forme d'un développement limité de $u(x,t)$ à l'ordre 2 en a.
10. Montrer que l'équation (1) devient alors une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

   Exprimer c en fonction de ω_0 et a. Que représente-t-il ?

Exercice 1. Représentations graphiques d'ondes (★)

On a représenté sur le graphe ci-dessous la hauteur d'eau dans un canal à vague $y(x,t)$ en un endroit repéré par l'abscisse $x_1 = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Cette onde se propage à la célérité $c = 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ dans le sens des x décroissants.



1. Tracer sur le même graphique que précédemment $y(x_2 = 3{,}0\,\mathrm{m}, t)$ et $y(x_3 = 5{,}0\,\mathrm{m}, t)$. Justifier.
2. Tracer l'allure du canal à vague à l'instant $t = 0$. Justifier.

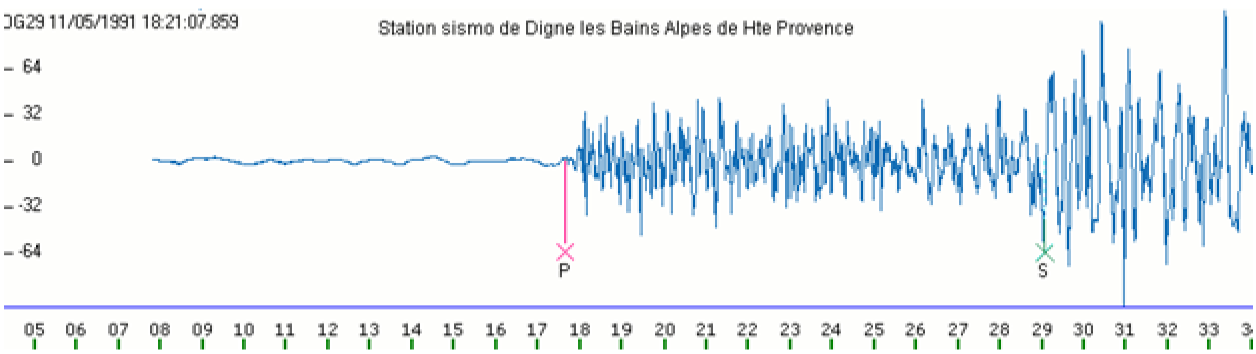
Exercice 2. Ondes sismiques (★)

Lors d'un séisme, différentes ondes sismiques se propagent depuis l'épicentre à travers la Terre. Parmi ces ondes, on distingue :

— les ondes P ou ondes primaires, ondes longitudinales dont la célérité vaut en moyenne $v_P = 6{,}0\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$;

— les ondes S ou ondes secondaires, ondes transversales dont la célérité vaut en moyenne $v_S = 3{,}5\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

A la suite d'un séisme le 11 mai 1991, un sismomètre situé à Digne dans les Alpes a enregistré le sismogramme ci-dessous (l'échelle horizontale est en seconde).



Soit d la distance qui sépare la station d'enregistrement de l'épicentre du séisme t_0 l'instant auquel les ondes sismiques sont émises, t_P et t_S ceux auxquels elles sont détectées par le sismomètre.

1. Exprimer t_P et t_S en fonction de t_0, d, v_P et v_S.
2. En déduire une expression pour l'écart de réception $\Delta t = t_S - t_P$.
3. Déterminer la distance d pour l'enregistrement donné.
4. Proposer une méthode permettant de localiser le séisme précisément.

Exercice 3. Ondes de surface (★★)

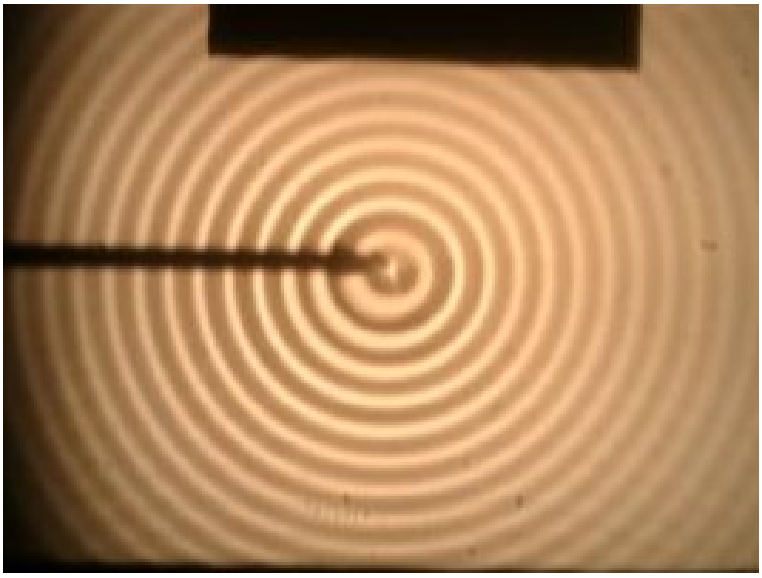
La relation de dispersion d'une onde à la surface de l'eau de profondeur moyenne h est donnée par $\omega^2 = (gk + \gamma k^3/\rho)\tanh(kh)$ où $g = 9{,}8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ est l'intensité de la pesanteur, $\gamma = 7{,}3\times10^{-2}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ est la constante de tension superficielle air-eau et $\rho = 1{,}0\times10^{3}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'eau.

1. Quelle condition numérique doit vérifier la longueur d'onde pour que les effets de la pesanteur (gk) soient largement dominants sur ceux de la capillarité ($\gamma k^3/\rho$) ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite.
2. Exprimer la vitesse de phase. L'eau est-elle un milieu dispersif pour les ondes de surface ?
3. Que devient la vitesse de phase dans la limite d'ondes de longueur d'onde très supérieure à la profondeur h (comme une onde de marée) ? Commenter.

Exercice 4. Cuve à onde (★★)

On génère une onde sinusoïdale à la surface d'une cuve à onde à l'aide un vibreur de fréquence $f = 5{,}0\,\mathrm{Hz}$. La figure représente la surface éclairée en éclairage stroboscopique : l'image est claire là où la surface de l'eau est convexe (surface en bosse), foncée là où elle est concave (surface en creux). L'échelle est donnée par l'ombre en haut qui mesure 50 cm de long.

Déterminer la profondeur moyenne de l'eau en utilisant la relation de dispersion et les valeurs numériques données dans l'exercice précédent.



Exercice 5. Effet Doppler (★★★)

Un émetteur E émet une onde sonore sinusoïdale dont le signal est $p_E(t) = A\cos(2\pi f t)$. Cette onde se propage à la vitesse c sur un axe Ox dans le sens des x croissants. L'émetteur, initialement à l'origine du repère, se déplace sur l'axe Ox à la vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u}_x$ ($v_0 > 0$). Soit un récepteur placé sur l'axe (Ox) au point M d'abscisse $x' > 0$.

1. A quelle date t' le récepteur reçoit-il le signal émis à la date t ? On distinguera les cas où l'émetteur est en amont ($x < x'$) ou en aval ($x > x'$) du récepteur.
2. En déduire l'expression du signal reçu par le récepteur en fonction de x' et t' dans ces deux cas.
3. Donner l'expression de la fréquence f' de l'onde reçue en fonction de f, $v_0$et c. Distinguer les situations d'approche et d'éloignement. Que se passe-t-il si $v_0 = c$?

Cette relation est utilisée en astrophysique pour déterminer la vitesse relative des étoiles par rapport à la Terre.

En analysant le spectre de la lumière issue de la galaxie NGC691, on identifie deux raies d'absorption du sodium aux longueurs d'onde 396,85 nm et 400,10 nm. Dans un laboratoire, leurs valeurs sont respectivement 393,37 nm et 396,85 nm.

4. La galaxie NGC691 s'éloigne-t-elle ou se rapproche-t-elle de nous ?
5. Estimer sa vitesse relative.

Réponses

Exercice 2 : 3. $d = 96\,\mathrm{km}$.

Exercice 3 : 1. $\lambda \gg 1{,}7\,\mathrm{cm}$.

Exercice 4 : $h = 2{,}9\,\mathrm{mm}$.

Exercice 5 : 3. $f' = f/(1 \mp v_0/c)$; 5. $v_0 = 2{,}5 \times 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.