Déterminant

Plan

1 Groupe symétrique

On considère $n \geq 2$ un entier.

1.1 Permutations, transposition, cycles.

Une bijection de l'ensemble $E_n = [\![1, n]\!]$ est aussi appelée une **permutation**.

Une telle permutation p est souvent notée sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$$

Voire :

$$\begin{pmatrix} p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$$

Attention, on utilise aussi la notation :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ i & \dots & n & \dots & 1 & \dots & j \end{pmatrix}$$

qui signifie : $p(1) = j$, $p(n) = i$.

Dans la première notation, la permutation $p(1) = 2$, $p(2) = 3$, $p(3) = 1$ est notée :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la seconde :

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces permutations forme le **groupe symétrique** S_n, groupe multiplicatif pour la composition d'élément neutre Id_{E_n}, de cardinal $n!$, non commutatif pour $n \geq 3$.

On appelle **transposition** échangeant $i \neq j$ dans E_n la permutation de E_n notée $\tau_{i\,j}$ ou $(i\,j)$ vérifiant $\tau_{i\,j}(i) = j$, $\tau_{i\,j}(j) = i$ et $\tau_{i\,j}(k) = k$ pour $k \in E_n - \{i, j\}$.

Remarquons que $\tau_{i\,j} = \tau_{j\,i} = \tau_{i\,j}^{-1}$ et qu'il y a $\binom{n}{2}$ transposition dans S_n.

Théorème 1 *Les transpositions engendrent le groupe S_n, autrement dit toute permutation est un produit de transpositions.*

Définition 1 *On appelle **cycle** ou **p-cycle** $(2 \leq p \leq n)$ une permutation σ de E_n telle qu'il existe $x_1, \dots x_p$ 2 à 2 distincts dans E_n et tel que :*

$$\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots, \sigma(x_{p-1}) = x_p, \sigma(x_p) = x_1$$

et pour $x \in E_n - \{x_1, \dots, x_n\}$: $\sigma(x) = x$.
Le cycle σ est noté $(x_1, \dots, x_p)$.

Dans les conditions précédentes, l'ensemble $\{x_1, \dots, x_p\}$ est appelé le **support** du cycle σ. Remarquons que le support est aussi : $\{x_1, \sigma(x_1) \dots, \sigma^{p-1}(x_p)\}$ avec $\sigma^p(x_1) = x_1$.

Les transpositions sont les 2-cycles. Les cycles engendrent le groupe S_n mais en fait, on a mieux :

Théorème 2 *Soit p une permutation de E_n différente de l'identité, il existe un unique ensemble $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ de cycles dans S_n à supports disjoints 2 à 2 tel que :*

$$p = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$$

De plus le produit précédent est commutatif.

Si on écrit p sous la forme précédente, on dit qu'on a **décomposé** p **en cycles**.

1.2 Signature

Théorème 3 *Il existe une unique application dite **signature** $\epsilon : S_n \to \{-1, +1\}$ telle que :*

- $\epsilon(\tau) = -1$ *pour toute transposition* τ
- $\epsilon(\sigma \circ \sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$.

Du coup, si σ est un p-cycle : $\epsilon(\sigma) = (-1)^{p+1}$. Plus généralement si une permutation p est le produit de N transpositions alors $\epsilon(p) = (-1)^N$.

On dit qu'une permutation est **paire** quand elle est de signature 1, **impaire** quand elle est de signature -1. L'ensemble des permutations paires est un sous groupe de S_n dit groupe alterné (notion hors programme).

2 Déterminant

2.1 Formes n-linéaires alternées

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2 *Une forme **n-linéaire** ϕ sur E est une application :*

$$\phi \begin{cases} E^n \to \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

qui est linéaire par rapport à chacune des variables $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

L'ensemble des formes n-linéaires sur E forme un espace vectoriel.

Définition 3 *Une forme **n-linéaire** ϕ sur E est dite **alternée** quand, pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ dans E^n et $i \neq j$ dans $\{1, \dots n\}$:*

$$x_i = x_j \implies \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

ou de manière équivalente :

Pour tout $(x_1, \dots, x_n)$ dans E^n et $i < j$ dans $\{1, \dots n\}$:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -\phi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E forme un espace vectoriel.

Propriété 1 *Si ϕ est une forme **n-linéaire** ϕ sur E **alternée** alors :*
Pour toute famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liée de E

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Pour toute famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de E, si p est une permutation de $\{1, \ldots n\}$:

$$\phi(x_{p(1)}, \ldots, x_{p(n)}) = \epsilon(p)\phi(x_1, \ldots, x_n)$$

2.2 Déterminant d'une famille dans une base

Soit E un espace de dimension n et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Théorème 4 *Il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_e$ telle que $\det_e(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Cette forme est appelée le **déterminant** dans la base E.*

Attention : $\det_e$ dépend de e !

Dans ce cas, soit $(f_1, \ldots f_n)$ une famille de n vecteurs de E, on peut écrire sa matrice $A = [a_{i\,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ (ses colonnes sont formées des coordonnées dans la base e des vecteurs $(f_1, \ldots f_n)$.

On note alors :

$$\det_e(f_1, \ldots f_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Théorème 5 *Dans les conditions précédentes :*

$$\det_e(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{p \in S_n} \epsilon(p) a_{p(1)1}.a_{p(2)2}.\ldots.a_{p(n)n}$$

Le résultat précédent est explicite mais peu utile dans la pratique car trop couteux en calculs au delà de la dimension 3. Plus fondamental :

Théorème 6 *L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle engendrée par $\det_e$.*
Pour toute forme n-linéaire alternée lambda sur E :

$$\lambda = \lambda(e) \det_e$$

Théorème 7 *Une famille e' de n vecteurs est une base si et seulement si $\det_e(e') \neq 0$. Dans ce cas :*

$$\det_{e'}(e) = (\det_e(e'))^{-1}$$

Dans le cas réel, choisir une **orientation** de E c'est choisir une base e qu'on considère **positivement ou directement orientée**. Alors, toute base e' vérifiant $\det_e(e') > 0$ est directement orientée et toute base e' vérifiant $\det_e(e') < 0$ est négativement orientée.

Dans les cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ on considère que la base canonique est positivement orientée.

2.3 Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

On fixe E un espace de dimension $n \geq 1$ et soit f un endomorphisme de E.

Définition 4 *Il existe un scalaire appelé $\det(f)$ tel que pour toute famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de E et toute base e de E :*

$$\det_e(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det(f) \cdot \det_e(v_1, \ldots, v_1)$$

En particulier, si $e = (e_1, \ldots, e_n)$:

$$\det(f) = \det_e(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

$\det(f)$ est intrinsèque, il ne dépend pas du choix d'une base.

On obtient alors les résultats fondamentaux :

Théorème 8 *Si f et g sont 2 endomorphismes de E et m un entier :*

- $\det(Id_E) = 1$
- $\det(\lambda Id_E) = \lambda^n$
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$
- $\det(f^m) = \det(f)^m$
- *f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et dans ce cas :*

$$\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$$

Le déterminant d'une matrice (carrée !) peut être calculé au choix comme le déterminant dans la base canonique de ses vecteurs colonnes ou comme le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé :

Définition 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice, on considère $(f_1, \ldots, f_n)$ ses colonnes dans $\mathbb{K}^n$ et toujours noté A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé, on définit le déterminant de A par :*

$$\det(A) = \det_{Can}(f_1, \ldots, f_n)$$

Si :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ on note } \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

On obtient alors les résultats fondamentaux :

Théorème 9 *Si A et B sont 2 matrices carrées d'ordre n et m est un entier :*

- $\det(I_n) = 1$ *;*
- $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$ *;*
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ *;*
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ *;*
- $\det(A^m) = \det(A)^m$ *;*
- *A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :*

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

- $\det({}^tM) = \det(M)$.

Pour relier avec les endomorphismes :

Théorème 10 *Si f est une endomorphisme d'un espace E muni d'une base e alors :*

$$\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_e(f)\right))$$

Encore une fois, le résultat obtenu ne dépend pas du choix de la base !

3 Produit mixte

On suppose ici que E est euclidien de dimension n orienté et B est une base orthonormée directe.

Définition 6 *On pose si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs dans E :*

$$[x_1, \ldots, x_n] = \det_B(x_1, \ldots, x_n)$$

*$[x_1, \ldots, x_n]$ est le **produit mixte** des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$.*

$[x_1, \ldots, x_n]$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. Cette définition prolonge en dimension n les notions de l'aire orientée du parallélogramme engendré par 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et du volume orienté du parallélépipède engendré par 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

Propriété 2 *Si f est une application linéaire et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs dans E :*

$$[f(x_1), \ldots, f(x_n)] = \det(f).[x_1, \ldots, x_n]$$

Si A est une matrice orthogonale alors $\det(A) = \pm 1$.

On dit que la matrice orthogonale A est **positive** quand $\det(A) = 1$,**négative** quand $\det(A) = -1$. L'ensemble des matrices de $O(n)$ positives, noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $O(n)$ appelé **groupe spécial orthogonal** (d'ordre n).

Propriété 3 *Si E est un espace euclidien orienté et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée directe de E, on dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie directe** quand, de manière équivalente $\mathrm{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale positive ou $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée directe de E.*

Une réflexion est une isométrie indirecte.

4 Calcul des déterminants

4.1 Matrices particulières

Propriété 4 *Si la matrice A est diagonale : $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ son déterminant est le produit des éléments sur sa diagonale :*

$$\det(A) = \det(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$$

Plus généralement :

Propriété 5 *Si une matrice est triangulaire (supérieure ou inférieure) alors son déterminant est le produit des éléments sur sa diagonale :*

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & \ldots & t_{ij} \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1.\lambda_2 \ldots . \lambda_n$$

Pour les matrices par blocs :

Propriété 6 *On considère une matrice carrée M triangulaire par blocs où A et D sont des matrices carrées :*

$$\det(M) = \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right| = \det(A) \cdot \det(D)$$

(formule généralisable à un plus grand nombre de blocs).

Un calcul classique :

Théorème 11 *On considère n scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Le* ***déterminant de Vandermonde*** *noté V est donné par :*

$$V(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \vdots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \vdots & \mu_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq n} (\mu_i - \mu_j)$$

4.2 Développement, Comatrice

On considère une matrice carrée d'ordre n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on pose

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \ldots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \ldots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \ldots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \ldots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$A_{i\,j}$ est le **cofacteur** de $a_{i\,j}$ dans A. Il est égal au signe près au déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en ôtant à la matrice A la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Les cofacteurs permettent de simplifier certains calculs de déterminants :

Théorème 12 (Développement par ligne ou par colonne) *Dans les conditions précédente, on a :*

Si $1 \leq j \leq n$ est fixé, on a le ***développement suivant la j-ème colonne*** *:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j}.A_{i\,j}$$

Si $1 \leq i \leq n$ est fixé, on a le ***développement suivant la i-ème ligne*** *:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}.A_{i\,j}$$

En écrivant :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

on définit la **comatrice** de A c'est à dire sa matrice des cofacteurs.

Théorème 13 *Dans les conditions précédentes :*

$$A \cdot (\mathrm{com}(A))^T = (\mathrm{com}(A))^T \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

Du coup, si A est inversible :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\mathrm{com}(A))^T$$

C'est bien joli mais à proscrire comme méthode de calcul de A^{-1} sauf dans le cas $n = 2$:

Si $ac - bd \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Pour ce qui est du calcul du déterminant et de l'inverse d'une matrice dans les cas "généraux", on utilise le pivot de Gauss et les manipulations élémentaires.

4.3 Opérations élémentaires

4.3.1 Opérations élémentaires sur les lignes

On considère une matrice A.

On note classiquement L_i sa i-ième ligne.

Rappelons les **opérations élémentaires sur les lignes** :

- Échanger 2 lignes L_i et L_j, opération notée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Multiplier une ligne L_i par un nombre $\lambda \neq 0$, opération notée $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$.
- Ajouter la ligne λL_j à L_i pour $i \neq j$, opération notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

- L'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à la multiplication de A à gauche par la matrice

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{i-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \text{j-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
\cdots & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
\cdots & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

Elle multiplie le déterminant par (-1).
- L'opération $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$ revient à la multiplication de A à gauche par la matrice :

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i-\text{ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

qui multiplie le déterminant par λ.
- L'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ revient à la multiplication de A à gauche par la matrice :

$$\begin{array}{r} \\ \\ i-\text{ième ligne },\lambda \text{ sur la } j\text{-ième colonne} \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 & \lambda & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & & 1
\end{bmatrix}$$

qui ne modifie pas le déterminant.

4.3.2 Opérations élémentaires sur les colonnes

On considère toujours une matrice A.

On note classiquement C_i sa i-ième colonne.
Rappelons les **opérations élémentaires sur les colonnes** :

- Échanger 2 colonnes C_i et C_j, opération notée $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Multiplier une colonne C_i par un nombre $\lambda \neq 0$, opération notée $C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i$.
- Ajouter la colonne λC_j à C_i pour $i \neq j$, opération notée $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$.

- L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ revient à la multiplication de A à droite par la matrice

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{i-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \text{j-ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ \cdots & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ \cdots & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

  elle multiplie le déterminant par (-1).
- L'opération $C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i$ revient à la multiplication de A à droite par la matrice :

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i - \text{ième ligne} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

  elle multiplie le déterminant par λ.
- L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ revient à la multiplication de A à droite par la matrice :

$$i-\text{ième ligne },\lambda \text{ sur la } j\text{-ième colonne} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

qui ne modifie pas le déterminant.

Savoirs

Toutes les formules ! ! Savoir qu'une matrice est inversible si et seulement son déterminant est non nul.

Savoir-faire

Calculer un déterminant sous la forme la plus factorisée possible en appliquant les méthodes de triangularisation.