Fiche 79 : Déterminant.

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 2

Soient a, b, c des réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et P la matrice réelle 3×3 suivante :

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de P.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\ker(P)$ et $\mathrm{Im}(P)$.
3. Soit $Q = I - P$, calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
4. Caractériser géométriquement P et Q.

Exercice 3

Soient a, b, c trois réels et Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & c & a \end{vmatrix}$$

1. On pose $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = a$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.
2. On suppose que $a^2 = 4bc$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = (n+1)\,\frac{a^n}{2^n}$$

Exercice 4

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note B_n le déterminant suivant :

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & b & a+b \end{vmatrix}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4,\ B_n = (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$ Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ B_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$