

PROBLÈME I

Le cyclotron

I.1) Dans le référentiel du cyclotron supposé galiléen, le proton n'est soumis dans un *dee* qu'à la force de Lorentz magnétique $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$, le poids étant négligeable pour une particule élémentaire chargée, et les frottements aussi dans un vide poussé. D'après la deuxième loi de Newton, $m_p \vec{a} = \vec{F}_m$ d'où $\vec{a} = \frac{e}{m_p} \vec{v} \wedge \vec{B}$.

Par conséquent, le vecteur accélération est perpendiculaire à \vec{B} , de même que le vecteur vitesse. Il en résulte que le mouvement se fait dans le plan perpendiculaire à \vec{B} et contenant \vec{v}_0 .

Dans le repère de Frenet (\vec{t}, \vec{n}) lié à la trajectoire du proton, $\vec{v} = v\vec{t}$ et $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$ où R est le rayon de courbure.

$\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à \vec{t} et se trouve dans le plan du mouvement, il est donc dirigé selon \vec{n} : on a donc $\vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{n}$.

On a donc $\frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n} = \frac{e}{m_p}vB\vec{n}$.

En projetant sur \vec{t} , il vient $\frac{dv}{dt} = 0$: la vitesse est constante et reste égale à v_0 .

En projetant sur \vec{n} on obtient $\frac{v^2}{R} = \frac{e}{m_p}vB$ dont on déduit le rayon de courbure $R = \frac{m_p v_0}{eB}$.

Ce dernier est constant, la trajectoire est donc circulaire.

I.2) La distance parcourue lors du demi-tour est $d = \pi R$, à la vitesse v_0 cela prend une durée $T_{1/2} = \frac{d}{v_0} = \frac{\pi m_p}{eB}$.

I.3) Il faut accélérer les protons successivement dans un sens puis dans un autre, il faut à chaque fois inverser le sens du champ électrique régnant entre les *dees*. Pour ce faire, on utilise une tension alternative.

I.4) $T_{1/2}$ correspond alors à une demi-période pour la tension sinusoïdale.

Sa fréquence est alors $f = \frac{1}{2T_{1/2}} = \frac{eB}{2\pi m_p} = 15 \text{ MHz}$.

I.5) La vitesse lors du dernier demi-tour est $v_s = \frac{R_s e B}{m_p}$ donc l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{cs} = \frac{1}{2} m_p v_s^2 = \frac{(R_s e B)^2}{2m_p} = 1,9 \times 10^{-12} \text{ J}$.

I.6) Lors d'une traversée entre les *dees*, le proton est soumis à la force de Lorentz. La composante magnétique ne travaille pas et la composante électrique dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p = eV$.

En l'absence de force non conservative, l'énergie mécanique se conserve donc la variation d'énergie cinétique est l'opposé de la variation d'énergie potentielle : $\Delta\mathcal{E}_c = -\Delta\mathcal{E}_p = e(V_i - V_f)$.

La différence de potentiel est la tension accélératrice qui est maximale au passage du proton donc $\Delta\mathcal{E}_c = eU_m$.

À chaque tour, deux accélérations ont lieu donc le gain en énergie cinétique au bout de N tours vaut : $\Delta\mathcal{E}_c(N) = 2NeU_m$.

L'énergie cinétique initiale étant nulle, le nombre de tours pour atteindre \mathcal{E}_{cs} est $N = \frac{\mathcal{E}_{cs}}{2eU_m} = \frac{e(R_s B)^2}{4m_p U_m} = 60$.

I.7) L'accélération d'un proton vaut $a = \frac{v^2}{R} = R \left(\frac{eB}{m_p} \right)^2$.

La puissance rayonnée par le photon lors de son dernier demi-tour est alors $\mathcal{P}_r = \frac{\mu_0 R_s^2 e^6 B^4}{6\pi c m_p^4}$.

L'énergie rayonnée est $\mathcal{E}_r = \mathcal{P}_r T_{1/2}$ soit $\mathcal{E}_r = \frac{\mu_0 R_s^2 e^5 B^3}{6c m_p^3} = 3,9 \times 10^{-30} \text{ J}$.

Ce résultat est infime devant l'énergie cinétique du proton, on peut donc complètement négliger la dissipation par rayonnement.

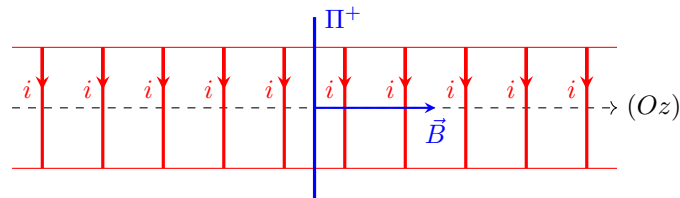
PROBLÈME II

Le dermatographe, machine à tatouer électrique

Partie A. Champ magnétique créé par une bobine

II.1) On utilise les coordonnées cylindriques d'axe (Oz) et la base associée.

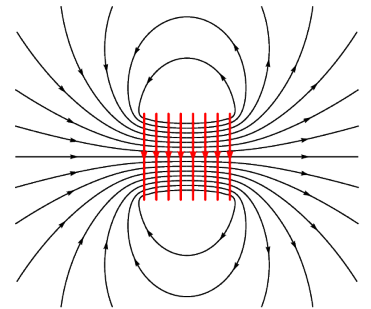
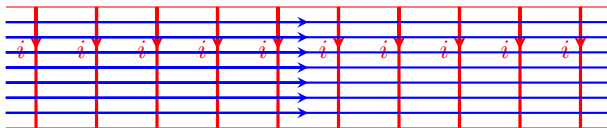
Le solénoïde étant infini, et en modélisant les spires comme étant d'épaisseur infime et donc planes, tout plan perpendiculaire à l'axe (Oz) est plan de symétrie Π^+ des courants. En appliquant le principe de Curie on en déduit que le champ magnétique est perpendiculaire à ces plans, donc dirigé selon l'axe \vec{e}_z du solénoïde.



De plus, le solénoïde est invariant par translation selon (Oz) , et par rotation autour de (Oz) . On en déduit que le champ ne dépend ni de z ni de θ .

Pour conclure, $\vec{B} = B(r)\vec{e}_z$.

II.2) Les lignes de champ sont parallèles dans le solénoïde (ci-dessous). Or le champ magnétique est à flux conservatif. On en déduit que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde (et nul à l'extérieur).



Dans le cas d'une bobine de longueur finie (ci-contre), les lignes de champ s'écartent en sortant de la bobine, ce qui correspond à une diminution du champ magnétique sur les bords de la bobine.

Partie B. Fonctionnement du dermatographe simplifié

II.3) Le courant circule du pôle + au pôle - du générateur, il est donc dirigé selon \vec{u}_r en coordonnées cylindriques d'axe $(O; \vec{u}_z)$.

La partie mobile est soumise à la **force de Laplace**. Pour un élément infinitésimal compris entre les distances r et $r + dr$ de l'axe, elle vaut $d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I(dr\vec{u}_r) \wedge (-B\vec{u}_z) = IBdr \vec{u}_\theta$.

On intègre sur la longueur de la partie mobile pour obtenir la résultante : $\vec{F}_L = IB\ell \vec{u}_\theta$.

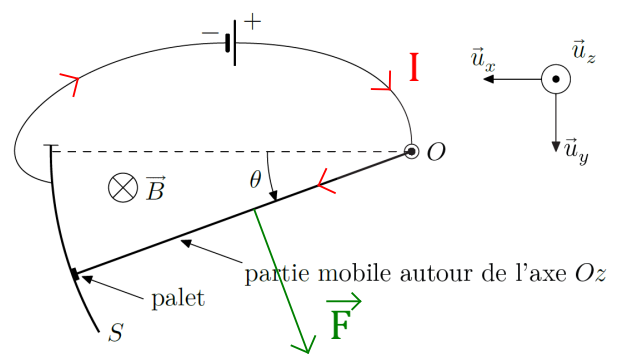
II.4) Le poids et les frottements étant négligeables, les actions exercées à l'équilibre sont :

- la réaction au niveau de la liaison pivot (Oz) , de moment nul par rapport à cet axe pour une liaison parfaite,
- le couple de rappel de moment $\Gamma = -K\theta$ par rapport à (Oz) ,
- la réaction de l'arc conducteur, qui est normale en l'absence de frottement ; sa droite d'action passe par O donc son moment est nul par rapport à (Oz) .

À l'équilibre, la résultante des moments s'annule donc $\theta_{eq} = 0$.

II.5) Lorsque le courant circule, la force de Laplace s'ajoute aux deux actions précédentes. Elle est exercée au milieu G de la partie mobile.

Son moment par rapport à O est donc $\vec{M}_O(\vec{F}_L) = \vec{OG} \wedge \vec{F}_L = (\ell/2)\vec{u}_r \wedge BI\ell \vec{u}_\theta = \frac{1}{2}BI\ell^2 \vec{u}_z$.



Remarque : pour faire le calcul sans utiliser l'information fournie, on somme les moments des forces de Laplace élémentaires.

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_L) = \int \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L = \int_0^\ell (r\vec{u}_r \wedge IBdr\vec{u}_\theta) = IB\vec{u}_z \int_0^\ell r dr = IB \times \frac{\ell^2}{2} \vec{u}_z$$

Le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à (Oz) s'écrit :

$$J\ddot{\theta} = \Gamma + \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{F}_L) = -K\theta + \frac{1}{2}BI\ell^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{K}{J}\theta = \frac{BI\ell^2}{2J}}$$

C'est bien de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = A$ où l'on identifie $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}}$ et $\boxed{A = \frac{BI\ell^2}{2J}}$.

II.6) La solution de l'équation homogène est harmonique : $\theta_0 = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$.

Une solution particulière est : $\theta_1 = A/\omega_0^2$.

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\theta(t) = A/\omega_0^2 + \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$$

Initialement, la position angulaire est $\theta(0) = 0$ donc $\alpha = -A/\omega_0^2$.

La vitesse angulaire est nulle initialement soit $\dot{\theta} = 0$ ce qui donne $\beta = 0$.

Pour conclure, la solution est : $\boxed{\theta(t) = \frac{A}{\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t))}$.

II.7) La partie mobile quitte l'arc conducteur à l'instant t_1 tel que $\theta(t_1) = \theta_S$ soit :

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(1 - \frac{\omega_0^2 \theta_S}{A}\right) = \sqrt{\frac{J}{K}} \arccos\left(1 - \frac{2K\theta_S}{\mu n I^2 \ell^2}\right) = 2 \times 10^{-2} \text{ s}}$$

II.8) L'équation est la même que précédemment avec $I = 0$ soit $A = 0$: $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$.

Les solutions sont : $\theta(t') = \alpha' \cos(\omega_0 t') + \beta' \sin(\omega_0 t')$.

Initialement, $\theta(t' = 0) = \theta(t = t_1) = \theta_S$ d'où $\alpha' = \theta_S$.

La vitesse angulaire initiale est celle obtenue à la fin de l'étape précédente : $\dot{\theta}(t' = 0) = \dot{\theta}(t = t_1)$ soit $\beta' = \frac{A}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t_1)$.

La solution est donc : $\boxed{\theta(t') = \theta_S \cos(\omega_0 t') + \frac{A}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t_1) \sin(\omega_0 t')}$.

II.9) Étant harmonique, l'évolution de la partie mobile est parfaitement symétrique, ce qui exclut la courbe 3.

De plus la vitesse angulaire évolue de façon continue ce qui exclut les courbes 2 et 4.

Pour conclure il s'agit de la **courbe 1**.

Partie C. Les pigments du tatouage

II.10) Le fer cristallise dans une maille cubique à faces centrées (cfc), dont les sites octaédriques (centre du cube et milieux des arêtes) sont tous occupés par des ions O^{-2} .

Or une maille cfc contient 4 nœuds (1 aux 8 sommets comptant chacun pour 1/8 pour la maille en propre, 3 aux centres des 6 faces comptant chacun pour 1/2), et il y a 4 sites octaédriques par maille (1 au centre, et 3 pour les 12 arêtes comptant chacun pour 1/4 en propre).

Ainsi il y a autant de fer que d'oxygène : la formule est donc \boxed{FeO} .

II.11) Un solide ionique est neutre : il faut pour ce faire que le fer soit sous la forme d'ions $\boxed{Fe^{2+}}$: son degré d'oxydation est II.

PROBLÈME III

Titration de la vitamine C

Partie A. Diagramme $E - \text{pH}$ de l'iode et de la vitamine C

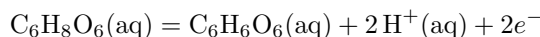
III.1) Le nombre d'oxydation de l'iode dans les trois espèces est $-I$ dans I^- , 0 dans I_2 et $+V$ dans IO_3^- .

On sait que le nombre d'oxydation augmente avec le potentiel E . On identifie alors : $A = IO_3^-(\text{aq})$, $B = I_2(\text{aq})$, $C = I^-(\text{aq})$.

III.2) Pour le couple $\text{AscH}_2/\text{AscH}^-$, $K_a(\text{AscH}_2/\text{AscH}^-) = \frac{[\text{AscH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AscH}_2]}$.

Sur la frontière, les concentrations sont égales $[\text{AscH}^-]_f = [\text{AscH}_2]_f$ donc $K_a = [\text{H}_3\text{O}^+]_f$ soit $\text{p}K_a = \text{pH}_f = 4,096$.

III.3) La demi-équation du couple ADA/AscH_2 s'écrit :



La formule de Nernst donne le potentiel redox :

$$E = E^\circ(\text{ADA}/\text{AscH}_2) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln(10) \log \left(\frac{a(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6(\text{aq}))a(\text{H}^+(\text{aq}))^2}{a(\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6(\text{aq}))} \right)$$

Les activités de $\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6(\text{aq})$ et de $\text{C}_6\text{H}_6\text{O}_6(\text{aq})$ sont égales à leurs concentrations, qui sont égales sur la frontière.

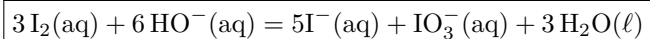
De plus $a(\text{H}^+(\text{aq})) = 10^{-\text{pH}}$ donc la frontière a pour équation $E_f = E^\circ(\text{ADA}/\text{AscH}_2) - e_o \text{pH}$ où $e_o = \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln(10)$.

Si on se place à $\text{pH} = \text{p}K_a = 4,096$ où $E_f = -0,106 \text{ V}$, on obtient $E^\circ(\text{ADA}/\text{AscH}_2) = E_f + e_o \text{pH} = 0,14 \text{ V}$.

Partie B. Titration

III.4) En milieu basique ($\text{pH} > 6,6$), le diiode I_2 n'est pas stable donc on doit au préalable acidifier la solution.

En milieu basique, le diiode se dismute en ions iodure I^- et iodate IO_3^- selon la réaction d'équation :



III.5) Dans le diagramme potentiel-pH, les domaines du diiode et de l'acide ascorbique sont **disjoints** : ils ne peuvent donc pas coexister et leur réaction est quasi-totale.

Elle peut néanmoins être lente, d'où l'attente nécessaire.

III.6) La réaction support du titrage se produisant au cours de l'étape 4 est combinaison linéaire des deux demi-équations suivantes :

— réduction dans le couple $I_2(\text{aq})/I^-$: $I_2(\text{aq}) + 2e^- = 2I^-(\text{aq})$;

— oxydation dans le couple $S_4O_6^{2-}(\text{aq})/S_2O_3^{2-}(\text{aq})$: $2S_2O_3^{2-}(\text{aq}) = S_4O_6^{2-}(\text{aq}) + 2e^-$.

Ainsi l'équation-bilan fournie consiste en le transfert de deux électrons.

Sa constante d'équilibre est alors : $K^\circ = 10^{\frac{2}{e_o}(E^\circ(I_2(\text{aq})/I^-(\text{aq})) - E^\circ(S_4O_6^{2-}(\text{aq})/S_2O_3^{2-}(\text{aq})))} = 10^{18}$.

La réaction est quasi-totale, comme il se doit pour un titrage.

III.7) Soit C la concentration molaire de l'acide ascorbique dans le jus d'orange. Il y a une quantité $n_{\text{AscH}_2} = CV_0$ dans l'échantillon.

La quantité de matière de diiode I_2 introduit dans l'erlenmeyer est $n_{I_2,0} = C_{I_2} V_2$. Il est en excès.

Lors de la réaction de l'étape 3, la quantité de diiode ayant réagi est $n_{I_2,r} = n_{\text{AscH}_2} = CV_0$.

Il en reste donc $n_{I_2,f} = n_{I_2,0} - n_{I_2,r} = C_{I_2} V_2 - CV_0$.

À l'équivalence du titrage de l'étape 4, les réactifs sont en proportions stœchiométriques soit $n_{I_2,f} = \frac{n_{S_2O_3^{2-},E}}{2} = \frac{C_s V_e}{2}$.

En conclusion, la concentration de vitamine C vaut $C = \frac{C_{I_2} V_2}{V_0} - \frac{C_s V_e}{2V_0} = 3,8 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Sa concentration massique vaut donc $C_m(\text{AscH}_2) = MC = 0,67 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.