

PROBLÈME I

Le cyclotron

Un cyclotron est un accélérateur de particules qui utilise l'action combinée d'un champ électrique et d'un champ magnétique afin d'accélérer des particules chargées.

Dans le cadre du traitement de certains cancers crâniens et oculaires, notamment chez les enfants, la radiothérapie classique est avantageusement remplacée par la protonthérapie (envoi de protons rapides sur les cellules cancéreuses en vue de les détruire) qui minimise les dégâts occasionnés aux tissus biologiques entourant la tumeur. Les protons à envoyer dans la tumeur sont accélérés à l'aide d'un cyclotron.

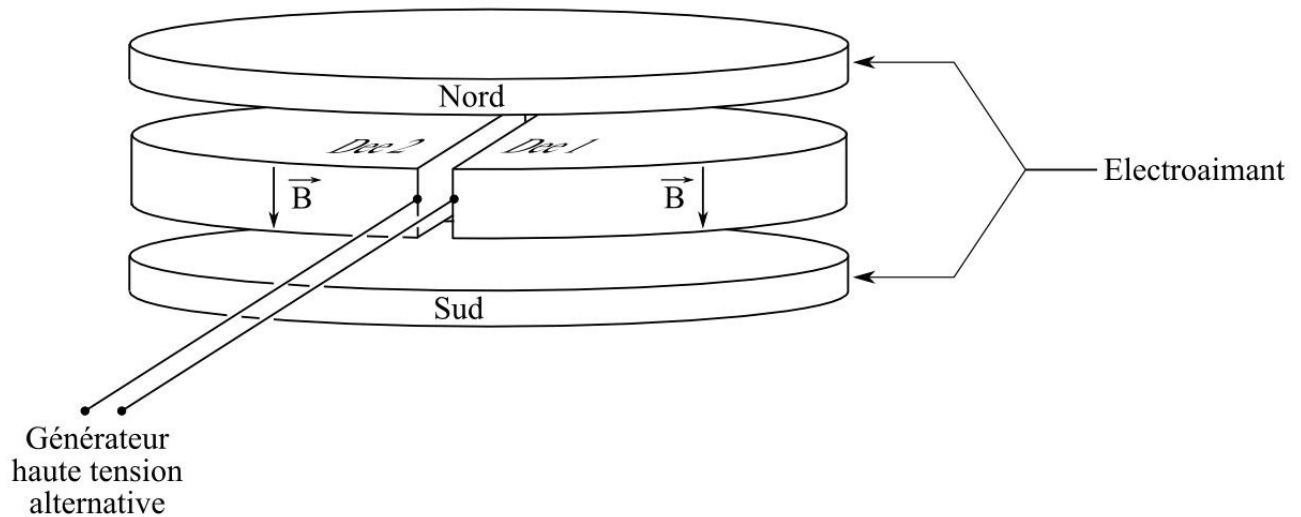


FIGURE 1 – Schéma d'un cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés *dees* (D en anglais) et séparés par un intervalle étroit. Un champ magnétique uniforme \vec{B} règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres. Il règne un vide poussé à l'intérieur des *dees*.

Un champ électrique variable \vec{E} peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant entre les *dees* une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale U_m lorsqu'un proton traverse cet espace.

Les protons, de masse m_p et de charge électrique $q_p = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. L'étude se fait dans le cadre non-relativiste.

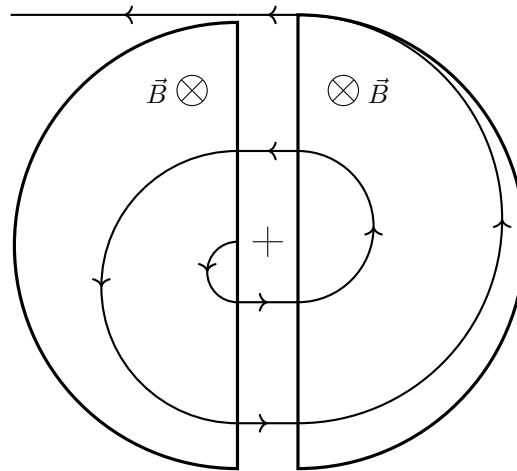


FIGURE 2 – Allure de la trajectoire d'un proton dans un cyclotron

Données :

- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- charge électrique élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
- masse d'un proton : $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- champ magnétique régnant dans le cyclotron : $B = 1,0 \text{ T}$
- amplitude de la tension alternative utilisée : $U_m = 1,0 \times 10^5 \text{ V}$
- rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron : $R_s = 50 \text{ cm}$

I.1) Un proton pénètre dans un *dee* avec une vitesse \vec{v}_0 perpendiculaire à \vec{B} . Montrer qu'il décrit, à vitesse constante, une trajectoire plane et circulaire de rayon de courbure $R = \frac{m_p v_0}{eB}$.

I.2) Il parcourt un demi-cercle dans le *dee*. Donner l'expression de la durée $T_{1/2}$ de ce demi-tour en fonction de m_p , e et B . Que peut-on en conclure ?

I.3) Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative.

I.4) En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi ft)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un *dee* à l'autre.

I.5) Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est R_s . Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique \mathcal{E}_{cs} des protons à la sortie du cyclotron.

I.6) Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e , R_s , B , m_p et U_m . Effectuer l'application numérique.

Toute particule chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance \mathcal{P}_r donnée par la formule de Larmor :

$$\mathcal{P}_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

I.7) Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon R_s . Conclure.

PROBLÈME II

Le dermographe, machine à tatouer électrique

Le dermographe est composé de plusieurs éléments :

- une partie mobile attachée au support via une lame métallique à l'origine d'un couple de rappel ;
- des bobines avec des noyaux ferromagnétiques, générant un champ magnétique.

Il est par ailleurs alimenté par un générateur, généralement contrôlé par le tatoueur via une pédale.

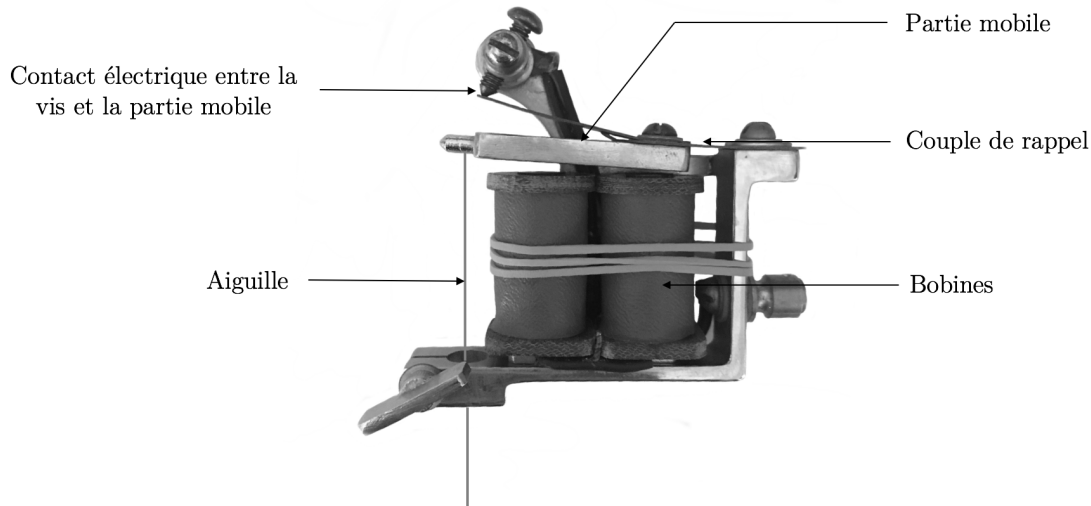


FIGURE 3 – Dermographe

Le principe du dermographe repose sur l'alternance entre deux phases. Dans un premier temps, la partie mobile est en contact avec la vis. Ce contact permet de fermer le circuit électrique alimenté par le générateur et formé par les bobines, la partie mobile et le support. Si le générateur fonctionne, un courant circule dans le circuit et en particulier dans les bobines. Un champ magnétique est alors créé par les bobines, ce qui génère une force sur la partie mobile, vers le bas.

Dans un second temps, la partie mobile se décolle de la vis de contact, ouvrant le circuit. La force magnétique disparaît et la force de rappel ramène la partie mobile vers la position de contact.

L'aiguille, accrochée à l'extrémité de la partie mobile, aura donc un mouvement périodique de haut en bas et de bas en haut.

Partie A. Champ magnétique créé par une bobine

On considère dans un premier temps une bobine assimilée à un solénoïde infini d'axe (Oz), avec un nombre de spires par unité de longueur n et parcourue par un courant d'intensité i permanente. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires.

II.1) En utilisant un schéma, déterminer la direction du champ magnétique \vec{B} créé par le courant circulant dans la bobine et indiquer les variables dont il dépend.

II.2) Tracer l'allure des lignes de champ magnétique pour une bobine infinie (sachant qu'il est nul à l'extérieur de la bobine), puis pour une bobine de longueur finie. Décrire les variations du champ magnétique dans les deux cas.

Dans la suite, on suppose que la partie mobile se situe toujours dans une zone où le champ peut être considéré comme uniforme, d'intensité :

$$B = \mu ni$$

où μ est la perméabilité magnétique du noyau ferromagnétique inséré dans la bobine.

Partie B. Fonctionnement du dermographe simplifié

Afin d'en simplifier l'étude, on s'intéresse, dans cette sous-partie, à une version modifiée du dermographe.

On modélise le contact par un arc de cercle conducteur avec lequel la partie mobile peut être en contact via un palet à son extrémité. Au point S ($\theta_S = \pi/60$), l'arc de cercle se termine. On admet que tant que le contact est assuré, la partie mobile est parcourue par un courant d'intensité I et qu'elle se déplace dans une zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B\vec{u}_z$, avec $B > 0$. Elle est soumise à un couple de rappel de moment $\vec{\Gamma} = -K\theta\vec{u}_z$.

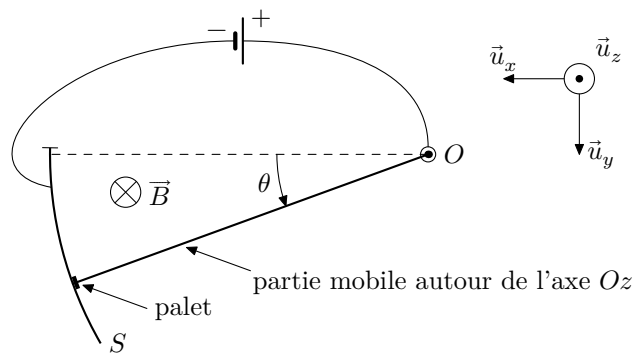


FIGURE 4 – Modélisation simplifiée du dermatographe

Données :

- longueur de la partie mobile : $\ell = 3 \text{ cm}$
- moment d'inertie de la partie mobile par rapport à (Oz) : $J = 2 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- coefficient de rappel : $K = 7 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$

On suppose que l'action du poids est négligeable devant les autres actions mécaniques et que les forces de frottement sont négligeables devant les autres forces mises en jeu. Par ailleurs, on néglige les effets d'induction liés au mouvement de la partie mobile dans le champ magnétique extérieur.

II.3) Recopier sur la copie le schéma de la figure 4 en indiquant le sens du courant électrique dans la partie mobile, ainsi que la force s'exerçant sur celle-ci lorsqu'elle est parcourue par un courant. Donner le nom et l'expression de cette force.

On indique qu'elle est exercée au milieu de la partie mobile.

II.4) Initialement ($t = 0^-$), le générateur n'est pas branché et la partie mobile est au repos. Quelle est alors la position de la partie mobile ? Justifier la réponse.

II.5) On met le générateur sous tension à $t = 0^+$. Effectuer un bilan des actions mécaniques sur la partie mobile.

II.6) Montrer que $\theta(t)$ satisfait l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A$ et exprimer ω_0 et A en fonction de J , K , I , B et ℓ .

II.7) Résoudre l'équation différentielle pour déterminer l'expression de $\theta(t)$ tant que le contact est assuré.

II.8) Déterminer l'expression puis la valeur de l'instant t_1 pour lequel la partie mobile quitte l'arc conducteur. On utilisera l'expression du champ donné à la fin de la partie A.

Données :

- perméabilité magnétique du matériau inséré dans la bobine : $\mu = 6 \times 10^{-4} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
- nombre de spires par unité de longueur de la bobine : $n = 2 \times 10^3 \text{ m}^{-1}$
- Intensité du courant circulant dans la partie mobile et la bobine : $I = 1 \text{ A}$

On pose $t' = t - t_1$. À $t' = 0$, la partie mobile quitte l'arc conducteur, ce qui annule la force magnétique.

II.9) Déterminer la nouvelle équation différentielle satisfaite par θ . La résoudre pour déterminer $\theta(t')$ tant que le contact est rompu.

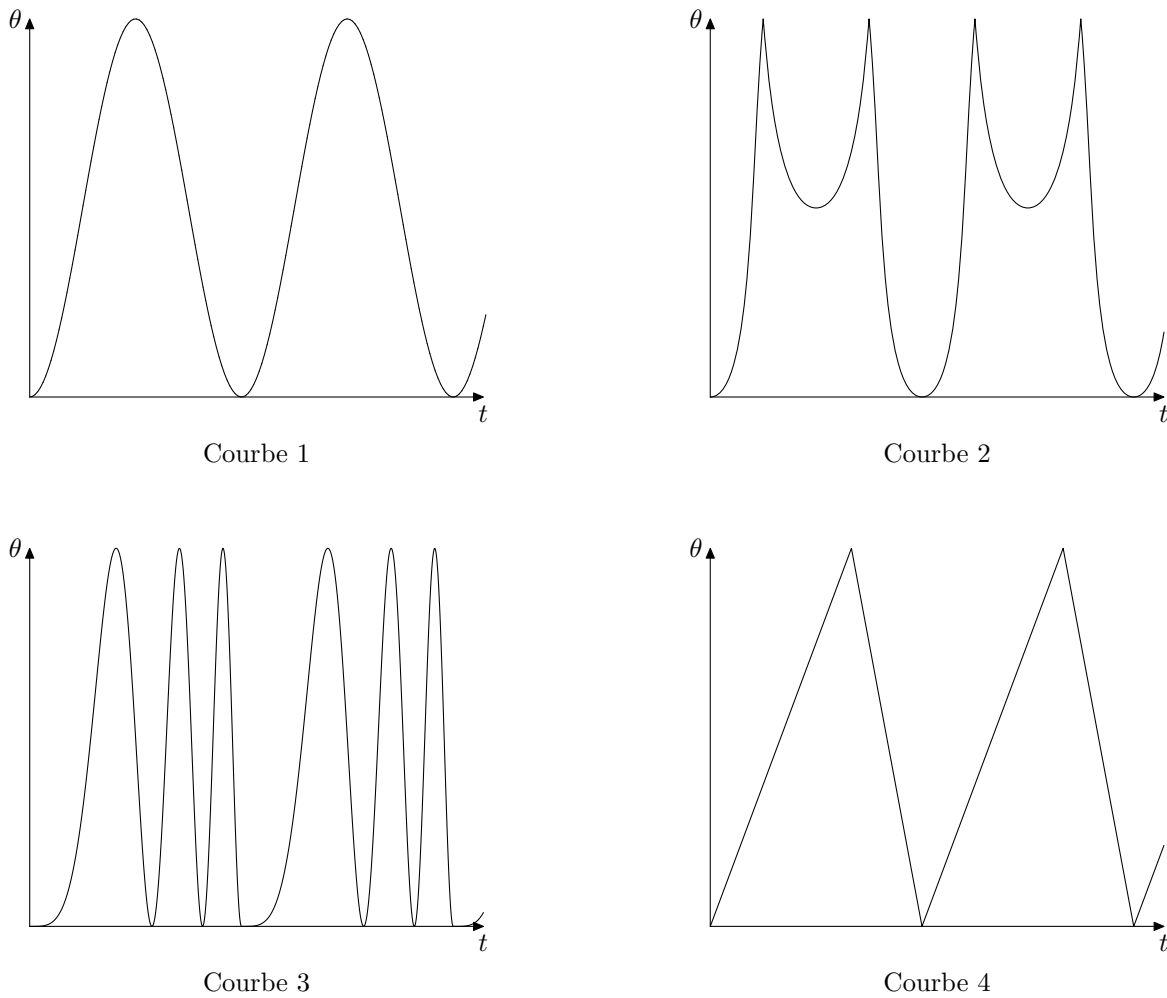
II.10) Parmi les 4 courbes de la figure 5 page suivante, choisir, en justifiant, celle représentant θ en fonction du temps. Les courbes ont parfois été tracées en accentuant fortement les caractéristiques : en réalité, les deux phases sont moins différenciées.

Partie C. Les pigments du tatouage

L'encre insérée par l'aiguille entre le derme et l'épiderme a une composition complexe. Cependant, un élément est responsable de la couleur de l'encre : il peut s'agir de pigments naturels ou synthétiques. Aujourd'hui, les pigments minéraux synthétiques sont très majoritaires, car souvent plus stables, moins coûteux et plus résistants.

Parmi ces pigments minéraux synthétiques, les plus courants sont les oxydes de fer, les oxydes de chrome, les sels de cadmium, les sels de cuivre et le dioxyde de titane.

Pour obtenir du noir, couleur la plus utilisée dans les tatouages, l'oxyde ferreux peut être utilisé.

FIGURE 5 – Profils de θ en fonction du temps

II.11) La structure cristalline de l'oxyde ferreux est décrite en figure 6. Donner, en justifiant la réponse, la formule chimique de ce pigment.

II.12) Quel est le degré d'oxydation du fer dans l'oxyde ferreux ?

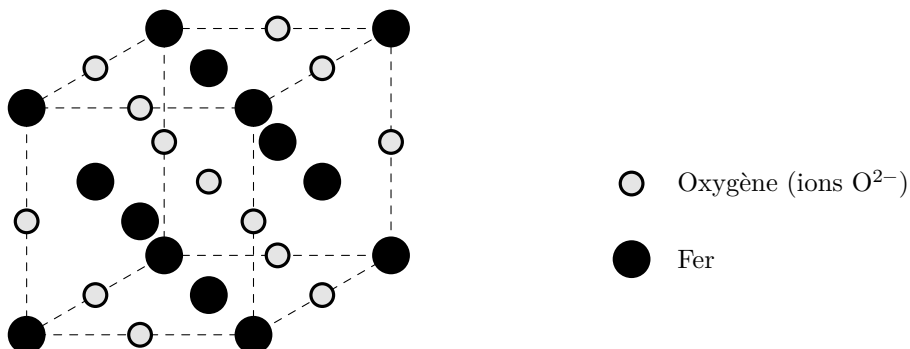


FIGURE 6 – Structure cristalline de l'oxyde ferreux

PROBLÈME III

Titration de la vitamine C

La vitamine C (ou acide ascorbique), qui a pour code E300, est utilisée comme agent antioxydant pour la conservation de certains aliments. Elle est présente dans le jus d'orange. On se propose de titrer la vitamine C de formule brute $C_6H_8O_6$, notée $AscH_2$ dans du jus d'orange à l'aide d'une méthode indirecte par iodométrie.

Données :

- masse molaire de l'acide ascorbique : $M = 176 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- potentiels standards à 298 K : $E^\circ(I_2(aq)/I^-(aq)) = 0,62 \text{ V}$; $E^\circ(S_4O_6^{2-}(aq)/S_2O_3^{2-}(aq)) = 0,08 \text{ V}$;
- $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln(10) = 0,06 \text{ V}$.

Partie A. Diagramme $E - \text{pH}$ de l'iode et de la vitamine C

Le diagramme $E - \text{pH}$ simplifié de l'élément iode I (trait rouge continu) est donné sur la figure 7. Il est tracé pour une concentration atomique en élément iode de $5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Les espèces à considérer pour l'élément iode sont $IO_3^-(aq)$, $I_2(aq)$ et $I^-(aq)$.

Sur la frontière entre deux espèces solubles, on admettra l'égalité des **concentrations atomiques** de l'élément considéré.

Le diagramme de la vitamine C (trait bleu discontinu) est superposé à celui de l'iode. La vitamine C est un diacide. Les espèces considérées pour ce diagramme sont $AscH_2$ ($C_6H_8O_6$), $AscH^-$ ($C_6H_7O_6^-$), Asc^{2-} ($C_6H_6O_6^{2-}$) et l'acide déshydroascorbique de formule brute $C_6H_6O_6$ noté ADA.

La frontière entre le couple $S_4O_6^{2-}(aq)/S_2O_3^{2-}(aq)$ figure également (trait noir pointillé) sur ce même diagramme.

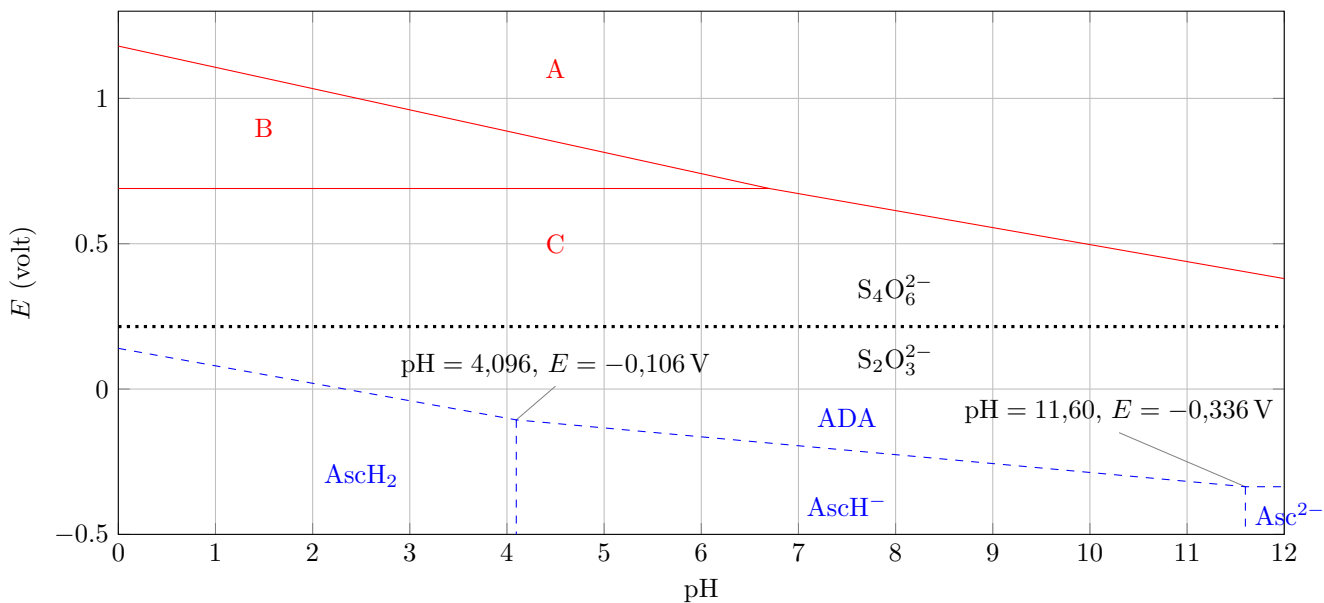


FIGURE 7 – Diagrammes $E - \text{pH}$ simplifiés de l'iode ($5 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$), de la vitamine C ($1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) et du couple $S_4O_6^{2-}(aq) / S_2O_3^{2-}(aq)$ ($1 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)

III.1) Identifier les espèces chimiques décrivant les domaines A, B et C pour l'élément iode.

III.2) À l'aide du diagramme $E - \text{pH}$, déterminer la valeur du pK_a du couple $AscH_2/AscH^-$.

III.3) Déterminer également le potentiel redox standard du couple $ADA/AscH_2$.

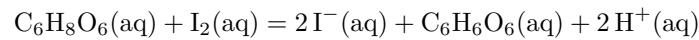
Partie B. Titrage

Le protocole du titrage est le suivant :

- *Étape 1* — Presser une orange et filtrer le jus. Prélever $V_0 = 10,0 \text{ mL}$ de ce jus et les introduire dans un erlenmeyer de 100 mL.
- *Étape 2* — Verser environ $V_1 \approx 10 \text{ mL}$ d'acide phosphorique H_3PO_4 à 10% dans l'erlenmeyer.
- *Étape 3* — Introduire dans l'erlenmeyer $V_2 = 20,0 \text{ mL}$ de solution de diiode I_2 à $C_{\text{I}_2} = 5,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le diiode I_2 est placé en large excès. Agiter. Attendre environ 20 minutes.
- *Étape 4* — Titrer la solution avec une solution de thiosulfate de sodium à $C_s = 1,00 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Lors de la décoloration de la solution, le volume versé de solution titrante est $V_e = 12,4 \text{ mL}$.

III.4) À l'aide du diagramme $E - \text{pH}$ de l'iode, expliquer pourquoi dans l'étape 2, on ajoute de l'acide phosphorique avant d'ajouter le diiode. Donner le type de réaction faisant intervenir le diiode I_2 placé en milieu basique. Écrire l'équation de cette réaction.

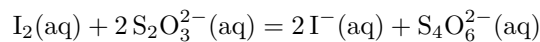
Au cours de l'étape 3, l'équation qui modélise la transformation chimique s'écrit :



III.5) À l'aide des diagrammes $E - \text{pH}$, justifier que cette réaction est quantitative (quasi-totale).

Pourquoi précise-t-on : « Attendre environ 20 minutes » ?

L'équation de la réaction support du titrage se produisant au cours de l'étape 4 est :



III.6) Calculer sa constante d'équilibre et conclure.

III.7) Déterminer la concentration massique en acide ascorbique du jus d'orange. Détailler le raisonnement utilisé.