Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 10-06-2026.

CB, Durée 4h, calculatrices et téléphones strictement interdits.

1 Algèbre linéaire

On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \qquad (1)$$

On note E_3 l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1).
On pose par ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout entier naturel n, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

1. Soit u une suite de E_3.
   (a) Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre U_{n+1}, A et U_n.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
   On considère la matrice
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (c) Démontrer que P est inversible puis que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on déterminera.
   (d) En déduire qu'il existe trois nombres réels x, y, z tels que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = x + y.2^n + z.3^n$$
2. Démontrer que toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_3.
3. Déterminer l'ensemble E_3. On le décrira comme un espace vectoriel dont on donnera une base.
4. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer u_n pour tout entier naturel n.
   (b) Déterminer la limite de cette suite en $+\infty$.
5. Montrer que si une suite (indéxée par les relatifs) $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie la relation :
   $$\forall n \in \mathbb{Z}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$
   alors $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ admet pour $n \to -\infty$ une limite finie.

2 Probabilités

Définitions et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

On note $\mathbb{R}[t]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de la variable réelle t..

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ (on note $\mathbb{E}$ l'espérance) et à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On définit sa fonction génératrice G_X par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$$

1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k$$
et en déduire que $G_X(t)$ est une fonction polynomiale en t dont on précisera le degré.
2. Calculer $G_X(1)$ et $G'_X(1)$.
3. Calculer $G_X(t)$ si la variable aléatoire X suit une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$.
4. Calculer $G_X(t)$ si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![2, n]\!]$.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé fini et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
6. Calculer $G_X(t)$ si la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Une application.

On jette deux dés à six faces (potentiellement pipés) numérotées de 1 à 6. On note X et Y les variables aléatoires donnant la valeur de la face obtenue par le premier et le second dé. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. On note $Z = X + Y$.

On suppose qu'il est possible de piper les deux dés de sorte que la variable aléatoire Z suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

7. Montrer que la fonction génératrice de Z est de la forme $G_Z(t) = t^2 Q(t)R(t)$ avec Q et R des polynômes de degrés 5 à coefficients réels et coefficients constants non nuls.
8. En déduire une contradiction. Conclure.

3 Analyse

Les parties A et B indépendantes.

Partie A : Étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

3. À l'aide de la relation précédente :
   (a) Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
   (b) Démontrer que pour $n \to +\infty$:

$$H_n \sim \ln(n)$$

On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad , \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

4. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
5. En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.
6. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Partie B : Le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

7. Rappeler quel résultat du cours permet de justifier la convergence de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$.

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0;\pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

8. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0;\pi]$:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = D_n(t)$$

9. En déduire que, si $t \in]0;\pi]$,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

10. Calculer la valeur de $D_n(0)$.
11. On considère la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par f :

$$f \begin{cases} t \to \frac{t}{\sin(t)} \text{ si } t > 0 \\ 0 \to 1 \end{cases}$$

    (a) Démontrer que f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
    (b) Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
12. Démontrer, à l'aide d'une double intégration par parties, que pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$$

13. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$B_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2}\,\mathrm{d}t$$

14. Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \mathrm{d}t$$

15. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t$$

16. Déterminer une fonction g de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ telle que

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t$$

17. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t) \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = 0$$

18. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$.