Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 24-04-2026.

CB, Durée 4h, calculatrices et téléphones interdits.

1 Algèbre linéaire

On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \qquad (1)$$

On note E_3 l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1).
On pose par ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour toute suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et tout entier naturel n, on note

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

1. Soit u une suite de E_3.
   (a) $U_{n+1} = A.U_n$.
   (b) Par récurrence : pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
   On considère la matrice
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (c) P est inversible et
   $$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$
   $$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   (d) On pose $V_n = P^{-1}U_n$ et $V_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
   on a $V_{n+1} = D.V_n$, $V_n = D^n V_0 = \begin{pmatrix} a \\ b.2^n \\ c.3^n \end{pmatrix}$ et $U_n = P.V_n$.
   Après calcul : il existe trois nombres réels x, y, z tels que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = x + y.2^n + z.3^n$$

2. On a :

$$\begin{cases} 1 = 6.1 - 11.1 + 6.1 \\ 2^3 = 6.2^2 - 11.2 + 6 \\ 3^3 = 6.3^2 - 11.3 + 6 \end{cases}$$

   Par récurrence avec double prédécesseur ... toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_3.
3. E_3 est l'ensemble des combinaisons linéaires des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a là une base de l'espace E_3.
4. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ naturel n.
   (a) $u_n = 7/2 - 4 * 2^2 + 3/2.3^n$
   (b) $u_n \to \infty$ en $+\infty$.
5. Si une suite (indéxée par les relatifs) $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

   Il existe x, y, z réels : Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = x + y.2^n + z.3^n$$

   On pose, pour tout $n \geq 0$: $v_n = u_{2-n}$
   La suite v_n vérifie alors $v_n = x + y.4.2^{-n} + z.9.3^{-n}$ pour $n = 0, 1, 2$ et pour $n \geq 2$:

$$v_{n+1} = \frac{11}{6}v_n - v_{n-1} + \frac{1}{6}v_{n-2}$$

   Les suites $1, 2^{-n}$ et 3^{-n} vérifient la même relation.
   Il suit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = x + y.4.2^{-n} + z.9.3^{-n}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$u_n = x + y.2^n + z.3^n \to_{n\to-\infty} x$$

   alors $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ admet pour $n \to -\infty$ une limite finie.

2 Probabilités

Définitions et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathbb{R}_n[t]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de la variable réelle t de degré au plus n.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On définit sa fonction génératrice G_X par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$$

1. Par le théorème de transfert $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

$G_X(t)$ est une fonction polynomiale en t de degré le plus grand des entiers k tel que $\mathbb{P}(X = k)$ est non nul.

2. $$G_X(1) = 1 \quad G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$$

3. Calculer $G_X(t) = pt + (1 - p)$ si la variable aléatoire X suit une loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$.
4. $G_X(t)\frac{1}{n-1}(t^2 + \cdots + t^n)$ si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
5. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé fini, par indépendance de t^X et t^Y alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
6. $G_X(t) = (pt + (1 - p))^n$ si la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Une application.

On jette deux dés à six faces (potentiellement pipés) numérotées de 1 à 6. On note X et Y les variables aléatoires donnant la valeur de la face obtenue par le premier et le second dé. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. On note $Z = X + Y$.

On suppose qu'il est possible de piper les deux dés de sorte que la variable aléatoire Z suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

7. La fonction $G_X(t)$ est de la forme $t\mathbb{P}(X = 1) + \cdots + t^6\mathbb{P}(X = 6)$ et $G_Y(t)$ est de la forme $t\mathbb{P}(Y = 1) + \cdots + t^6\mathbb{P}(Y = 6)$ avec $\mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(X = 6), \mathbb{P}(Y = 1), \mathbb{P}(Y = 6)$ tous non nuls car sinon, on ne pourrait pas obtenir 2 et 12 pour la somme.
   Ainsi $G_Z(t) = t^2Q(t)R(t)$ avec Q et R des polynômes de degrés 5 à coefficients réels et coefficients constants non nuls.
8. $Q(t)$ de degré 5 a au moins une racine réelle x_0 qui n'est pas 1 ($Q(1) = 1$).
   Or (Z suit une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$), $G_Z(x_0) = x_0^2 \dfrac{x_0^{11} - 1}{x_0 - 1} \neq 0$.
   Il n'est pas possible de piper les deux dés de sorte que la variable aléatoire Z suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

3 Analyse

Les parties A et B indépendantes.

Partie A : Étude des nombres harmoniques

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Par intégration : pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

2. Par sommation : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

3. A l'aide de la relation précédente :

   (a) La suite $(H_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$ (clair...).

   (b) Pour $n \to +\infty$:

$$H_n \sim \ln(n)$$

   On considère désormais les suites $(u_n)_{n\geq}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad , \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

4. Ces deux suites sont adjacentes : v_n est croissante positive et u_n décroissante $u_n - v_n \to 0$ (fait en classe).
5. Ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ.
6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on utilise le fait que $0 \leq u_n - \gamma \leq u_n - v_n$ pour dire :

$$0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Partie B : Le problème de Bâle

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1, on définit la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ par

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

7. Série de Riemann!!
8. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0;\pi]$, on pose

$$D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

9. Par Euler, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t \in [0;\pi]$:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = D_n(t)$$

10. Si $t \in]0;\pi]$, par la série géométrique et l'angle moitié :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

11. Calculer la valeur de $D_n(0)$.
On considère la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par f :

$$f \begin{cases} t \rightarrow \frac{t}{\sin(t)} \text{ si } t > 0 \\ 0 \rightarrow 1 \end{cases}$$

(a) Démontrer que f est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ car $t \sim_0 \sin(t)$.
(b) Démontrer que f est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ car $f'(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{\sin^2(t)} \rightarrow_{t\rightarrow 0} 0$ (théorème de dérivabilité des prolongements).

12. On intègre $\cos(kt)$ et on dérive le polynôme.
13. En sommant les égalités précédentes, pour tout entier naturel n non nul,

$$B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2} \,\mathrm{d}t$$

14.

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \mathrm{d}t = \frac{-\pi^2}{3}$$

15. On a ainsi :

$$B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \,\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{6}$$

(formule vraie sur $]0,\pi]$ mais la fonction intégrée est "continue par morceaux" sur $[0,\pi]$ ce qui suffit pour la définition de l'intégrale).

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^\pi t\left(1 - \frac{t}{2\pi}\right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^\pi \frac{t}{2}\left(2 - \frac{2}{\pi}\frac{t}{2}\right) \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \,\mathrm{d}\frac{t}{2}$$

Il reste à faire le changement de variable $t/2 \rightarrow t$ pour conclure, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2}{\pi}t\right) \sin((2n+1)t) \,\mathrm{d}t$$

16. $g(t) = \frac{t}{\sin(t)}\left(2 - \frac{2}{\pi}t\right)$ est de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t) \,\mathrm{d}\mathrm{d}t$$

17. Par intégration par parties et inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin((2n+1)t) \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2n+1}\left(\mathrm{Max}_{[0,\pi/2]}(|g|) + \mathrm{Max}_{[0,\pi/2]}(|g'|)\right)$$

18.

$$B_n \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$