

Appareil photographique

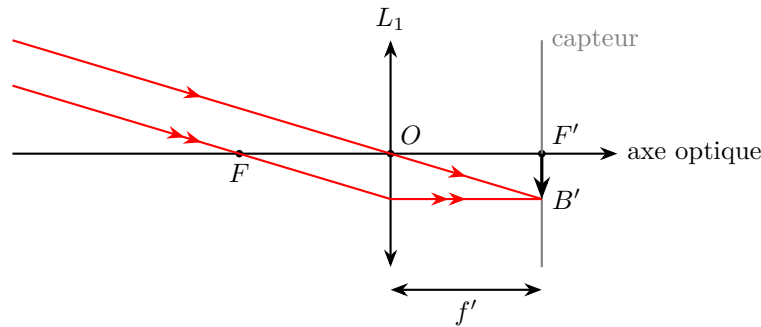
Partie A. Objectif de l'appareil photographique

I.1) La distance focale image de la lentille vaut $f' = \frac{1}{V} = \frac{1}{5,0} = 0,20 \text{ m}$

L'objet étant situé à $200 \text{ m} \gg f'$, on peut considérer que l'objet est à l'infini.

L'image et donc le capteur doivent donc être dans le plan focal image, soit à une distance $f' = 20 \text{ cm}$ de la lentille.

I.2)



I.3) Le grandissement vérifie $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$ donc $A'B' = \frac{OA'}{OA} AB$.

Données : $\overline{OA'} = f' = 20 \text{ cm}$, $\overline{OA} = -200 \text{ m}$, $\overline{AB} = 80 \text{ cm}$

A.N. : $\overline{A'B'} = \frac{0,20}{-200} \times 0,80 = -0,80 \times 10^{-3} \text{ m}$. En taille (> 0) l'image fait donc 0,80 mm.

I.4) $A(\infty) \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$

On note $L_1(O_1, f'_1)$ et $L_2(O_2, f'_2)$ avec $f'_1 = 20 \text{ cm}$ et $f'_2 = -\frac{1}{20} = -0,050 \text{ m} = -5,0 \text{ cm}$.

Pour les mêmes raisons que précédemment, $\overline{O_1A_1} = f'_1 = 20 \text{ cm}$.

La relation de conjugaison de Descartes pour la lentille L_2 s'écrit :

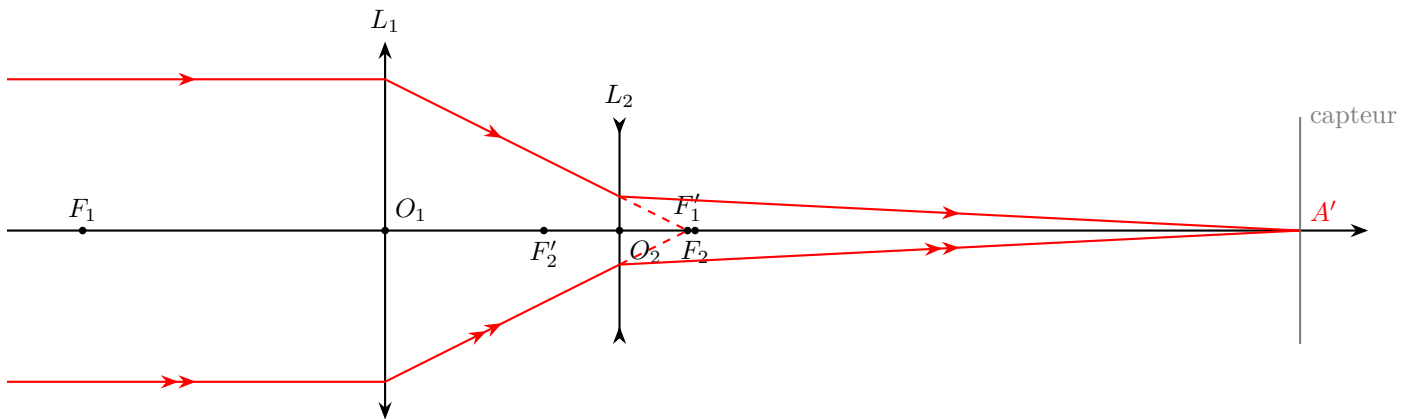
$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_2A'} = \frac{f'_2 \times \overline{O_2A_1}}{f'_2 + \overline{O_2A_1}}$$

Or $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}$ avec $\overline{O_2O_1} = -15,5 \text{ cm}$ donc :

$$\overline{O_2A'} = \frac{f'_2 \times (\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1})}{f'_2 + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}} = \frac{f'_2 \times (\overline{O_2O_1} + f'_1)}{f'_2 + \overline{O_2O_1} + f'_1}$$

A.N. : $\overline{O_2A'} = \frac{-5,0 \times 10^{-2} (-15,5 \times 10^{-2} + 0,20)}{-0,050 - 0,155 + 0,20} = \frac{0,050 \times 0,045}{-0,005} = 0,45 \text{ m} = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">45 \text{ cm}.$

I.5)



I.6) $\Delta = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A'}$

A.N. : $\Delta = 15,5 + 45 = \boxed{61 \text{ cm}}$.

I.7) Le grandissement est tel que :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \times \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}} \times \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$$

d'où $\boxed{\overline{A'B'} = \overline{AB} \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2O_1} + f'_1} \times \frac{f'_1}{\overline{O_1A}}}$

A.N. : $\overline{A'B'} = 0,80 \times \frac{0,45}{-0,155 + 0,20} \times \frac{0,20}{-200} = \frac{0,80 \times 0,45}{0,045} \times (-10^{-3}) = -8,0 \times 10^{-3} \text{ m}$ donc $\overline{A'B'} = -8,0 \text{ mm}$.

L'image mesure $\boxed{8,0 \text{ mm}}$.

I.8) En notant f'_3 la focale (et donc l'encombrement) d'une telle lentille :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_3A'}}{\overline{O_3A}} \quad \text{donc} \quad \boxed{f'_3 = \overline{O_3A'} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \overline{O_3A}}$$

A.N. : $f'_3 = \frac{-8,0 \times 10^{-3}}{80 \times 10^{-2}} \times (-200) = 10^{-2} \times 200 = \boxed{2 \text{ m}}$.

L'intérêt du téléobjectif est de fortement réduire l'encombrement.

Partie B. Profondeur de champ

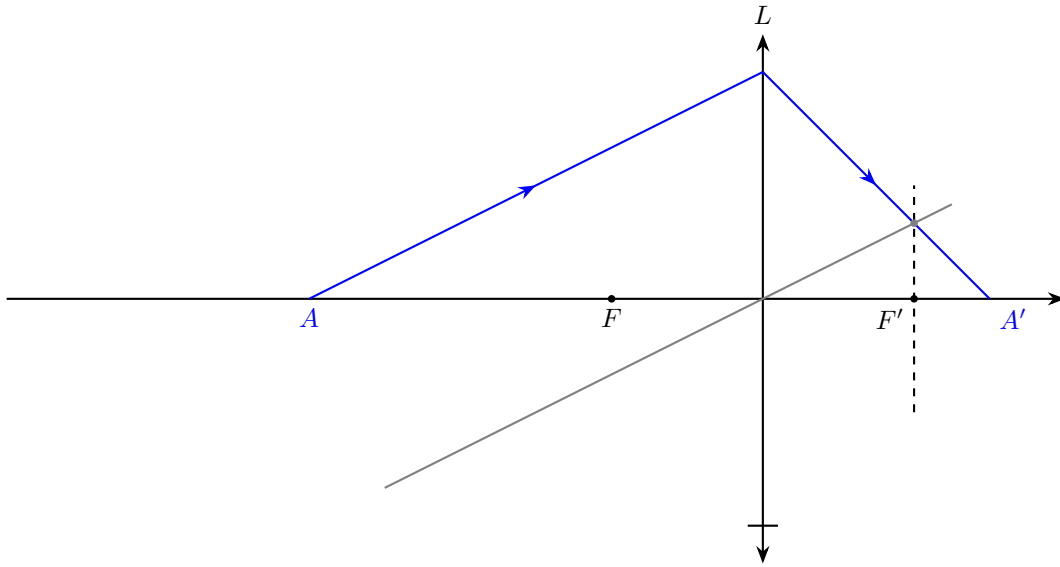
I.9) On se place dans les conditions de Gauss en se limitant à des rayons paraxiaux :

- point d'incidence proche du sommet des dioptries
- rayons peu inclinés (faible angle d'incidence)

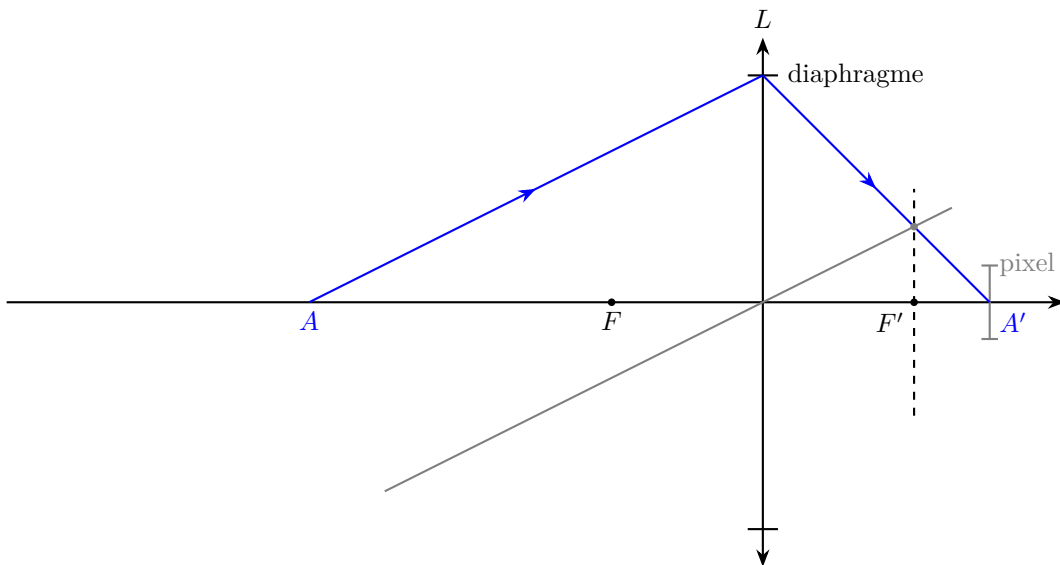
I.10) Stigmatisme rigoureux : si tout rayon incident passant par un point objet A possède un émergent passant par un point image A' après avoir traversé le système optique.

Stigmatisme approché : si tout rayon incident passant par un point objet A possède un émergent passant proche d'un point image A' après avoir traversé le système optique, la distance devant être inférieure à la taille d'un pixel du capteur.

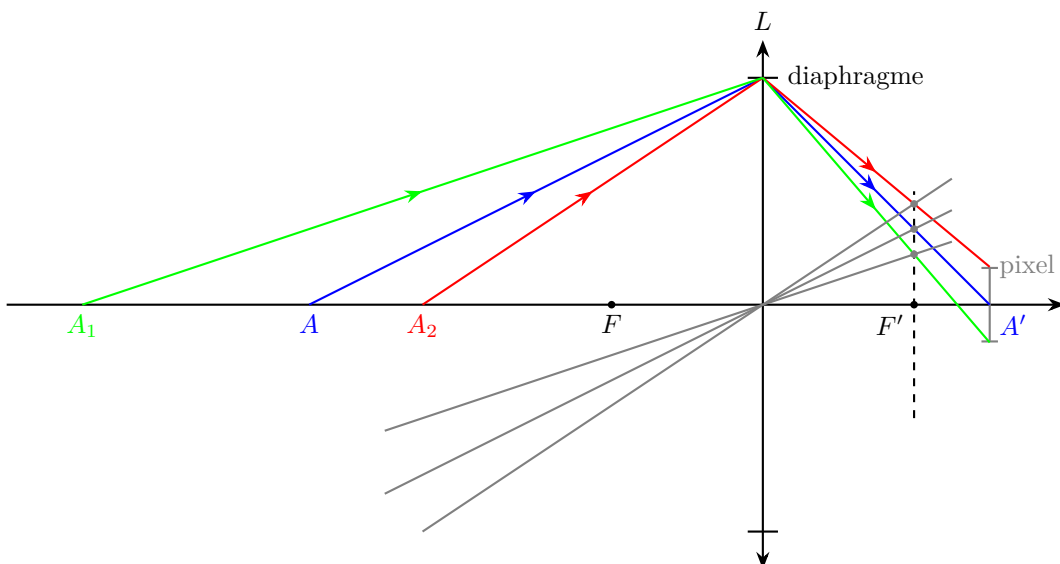
I.11) Construction de l'image avec un foyer secondaire



I.12) Diaphragme et pixel

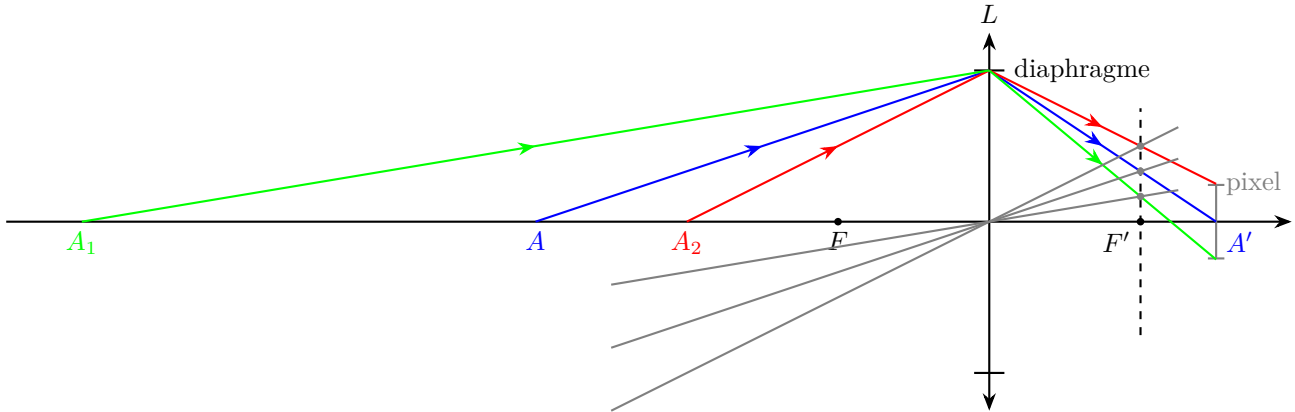


I.13) Construction de la profondeur de champ avec des foyers secondaires



I.14) On mesure $p = 4,5 \text{ cm}$ (entre 4 cm et 5 cm).

I.15) Cette fois on mesure $p' = 8 \text{ cm}$. Diminuer le diamètre du diaphragme **augmente** donc la profondeur de champ.



Partie C. Accéléromètre

I.16) Système : masse mobile M de masse m .

Référentiel : terrestre, supposé galiléen.

Bilan des forces :

- poids : $\vec{P} = mg \vec{e}_z$
- force de frottement fluide : $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{\ell} \vec{e}_z$
- force de rappel élastique : $\vec{F}_{el} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z$

À l'équilibre, $\ell = \ell_{eq}$, $\dot{\ell} = 0$ et d'après le principe d'inertie :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad mg \vec{e}_z - k(\ell_{eq} - \ell_0) \vec{e}_z = \vec{0}$$

Projeté sur \vec{e}_z :

$$mg + k\ell_0 = k\ell_{eq} \quad \text{donc} \quad \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

I.17) Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{a} = z_M \ddot{\ell} \vec{e}_z = (z_A + \ddot{\ell}) \vec{e}_z$$

Il vient :

$$m(-Z_A \omega^2 \cos(\omega t) + \ddot{\ell}) \vec{e}_z = mg \vec{e}_z - \alpha \dot{\ell} \vec{e}_z - k(\ell - \ell_0) \vec{e}_z$$

Projeté sur \vec{e}_z :

$$-mZ_A \omega^2 \cos(\omega t) + m\ddot{\ell} = mg - \alpha \dot{\ell} - k\ell + k\ell_0$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\ddot{\ell} + \frac{\alpha}{m} \dot{\ell} + \frac{k}{m} \ell = \frac{k}{m} \ell_{eq} + Z_A \omega^2 \cos(\omega t)}$$

I.18) On pose $Z = \ell - \ell_{eq}$ d'où $\dot{Z} = \dot{\ell}$ et $\ddot{Z} = \ddot{\ell}$. L'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{Z} + \frac{\alpha}{m} \dot{Z} + \frac{k}{m} Z = Z_A \omega^2 \cos(\omega t).$$

Par identification avec la formule proposée : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$ soit $\boxed{Q = \omega_0 \frac{m}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{km}}$.

I.19) En régime sinusoïdal forcé, le système oscille à la même **pulsation** ω que l'excitation, mais avec une **amplitude** Z_M a priori différente de celle de l'excitation et un **déphasage** ϕ par rapport à l'excitation. D'où la forme : $\boxed{Z(t) = Z_M \cos(\omega t + \phi)}$.

I.20) On note $\underline{Z} = Z_M e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{Z}_M e^{j\omega t}$. Avec la notation complexe, $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$, d'où :

$$\begin{aligned} \underline{Z}(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} \underline{Z}(j\omega) + \omega_0^2 \underline{Z} &= \omega^2 Z_A e^{j\omega t} \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_M \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right) &= \omega^2 Z_A \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_M &= \frac{\omega^2 Z_A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{Z_A}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j \frac{\omega_0}{\omega Q}} \end{aligned}$$

En posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, on a :

$$\boxed{Z_M = |\underline{Z}_M| = \frac{Z_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{Qx}\right)^2}}$$

I.21) Pour les basses fréquences ($x \rightarrow 0$) : $Z_M \rightarrow 0$.

Pour les hautes fréquences ($x \rightarrow \infty$) : $Z_M \approx Z_A$.

On a donc un **filtre passe-haut**.

I.22) $Z_M(x)$ est maximum lorsque l'argument de la racine est minimum. On a alors :

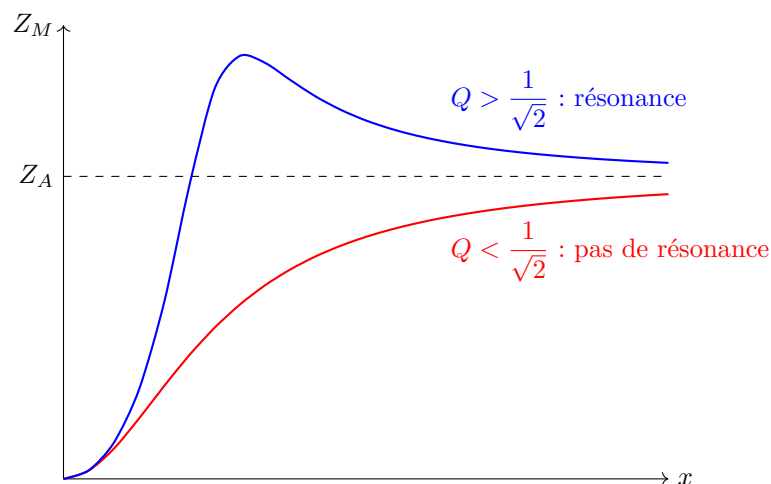
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2 x^2} \right]_{x=x_r} &= 0 \quad \text{soit} \quad 2 \left(\frac{1}{x_r^2} - 1\right) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x_r^3} + \frac{1}{Q^2} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x_r^3} = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{x_r^2} - 1\right) &= -\frac{1}{Q^2} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{aligned}$$

Cette égalité n'est possible que si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ soit $2Q^2 > 1$ c'est-à-dire pour $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$ (car $Q > 0$).

On a alors $\boxed{x_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}}$.

I.23) Pour $x \rightarrow 0$, $\boxed{Z_M \approx Z_A x^2}$.

Pour $x \rightarrow \infty$, $Z_M \approx Z_A$ (asymptote horizontale).



I.24) Pour $f = 10$ Hz, $\omega = 2\pi f \approx 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $x = \frac{\omega}{\omega_0} \approx 3 \times 10^{-2}$: on est dans le régime basse fréquence.

Avec $Z_A = 2$ mm il vient $Z_M \approx Z_A x^2 \approx (3 \times 10^{-2})^2 \times 2 = 18 \times 10^{-4}$ mm soit une vibration d'amplitude $\boxed{Z_M = 2 \times 10^{-6} \text{ m}}$: le stabilisateur a bien joué son rôle, les vibrations ont été fortement atténuées.

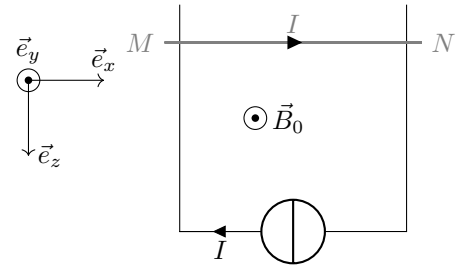
Métrologie des masses

Partie A. Balance de Kibble : pesée primaire à l'échelle du kilogramme

II.1) Force de Laplace exercée sur la tige :

$$\vec{F}_L = \int_M^N I d\vec{l} \wedge \vec{B} = I \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} \quad (\text{tige rectiligne, } I \text{ et } \vec{B} \text{ constants})$$

$$= I a \vec{e}_x \wedge B_0 \vec{e}_y \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{F}_L = I a B_0 \vec{e}_z}$$



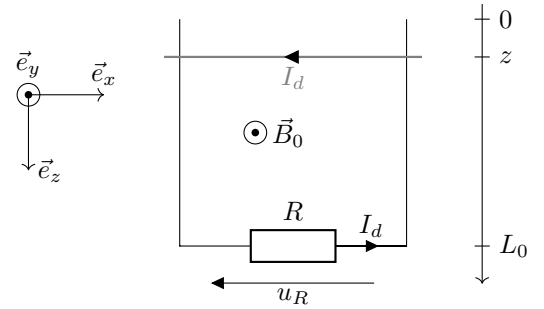
II.2) Vecteur normal au circuit : $\boxed{\vec{n} = \vec{e}_y}$ (ou $\vec{n} = -\vec{e}_y$ si autre sens).

II.3) Flux magnétique à travers le circuit : $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot S \vec{n} = B_0 \vec{e}_y \cdot S \vec{e}_y = B_0 S$.

Or $S = a \times (L_0 - z) \Rightarrow \phi = B_0 a (L_0 - z)$ (ou $\phi = -B_0 a (L_0 - z)$).

D'après la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 a (-\dot{z})$.

$\dot{z} = v_0$ donc $\boxed{e = B_0 a v_0}$ (ou $e = -B_0 a v_0$).

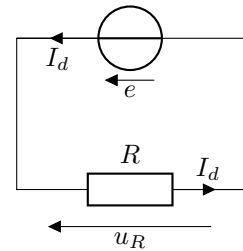


II.4) Circuit électrique équivalent ci-contre.

Loi des mailles : $e = u_R$ (ou $e = -u_R$) soit $B_0 a v_0 = u_R$ donc $\boxed{B_0 a = \frac{u_R}{v_0}}$.

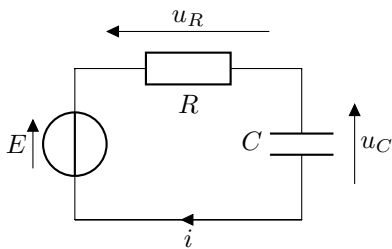
II.5) À l'équilibre en phase statique, $\|\vec{F}_L\| = mg$ soit $mg = I a B_0 = I \frac{u_R}{v_0}$.

Ainsi $\boxed{m = \frac{I u_R}{v_0 g}}$.



Partie B. Balance électrostatique : pesées primaires à l'échelle du milligramme

II.6) Circuit pour $t \geq 0$.



Loi des mailles : $E = u_R + u$

Or $u_R = Ri$ (loi d'Ohm) et $i = C \frac{du}{dt}$ (relation $u-i$ dans C)

Il vient $E = u + RC \frac{du}{dt}$ soit $\boxed{\frac{E}{\tau} = \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau}}$ en notant $\tau = RC$.

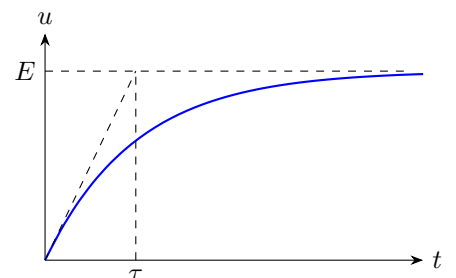
II.7) La solution homogène est $u_H = A e^{-t/\tau}$ et une solution particulière $u_p = E$ donc $u(t) = E + A e^{-t/\tau}$ pour $t \geq 0$.
 Or $u(t = 0^-) = 0$ (condensateur déchargé) et $u(t = 0^-) = u(t = 0^+)$ (continuité de la tension du condensateur) soit $0 = E + A$ d'où $A = -E$.

Pour conclure $\boxed{u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}$.

II.8) $\boxed{C = \frac{\tau}{R}}$.

Avec la méthode de la tangente à l'origine on lit : $\tau = 1,2$ carreaux, soit $\tau = 120 \mu\text{s}$.

A.N. : $C = \frac{120 \times 10^{-6}}{1 \times 10^3} = 120 \times 10^{-9} \text{ F} = \boxed{120 \text{ nF}}$.



II.9) Dans notre modèle $\tau = C \times R$, le graphe $\tau = f(R)$ devrait donc être linéaire.

On remarque que **les points ne sont pas tous bien alignés**, notamment aux grands R .

De même, $u(t \rightarrow \infty) = E$ dans notre modèle. Or sur le graphe de droite la tension $u(t)$ a une **asymptote inférieure à E** , ce qui s'écarte là aussi du modèle.

II.10) Relation courant-tension du condensateur : $i_1 = C \frac{du}{dt}$.

Loi d'Ohm : $i_2 = \frac{u}{R_e}$.

$u_R = Ri$ (loi d'Ohm) puis $u_R = R(i_1 + i_2)$ (loi des nœuds) soit $u_R = RC \frac{du}{dt} + \frac{R}{R_e} u$.

II.11) D'après la loi des mailles :

$$E = u_R + u = RC \frac{du}{dt} + \frac{R}{R_e} u + u$$

qui se met sous la forme :

$$\frac{E}{RC} = \frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} \left(\frac{R}{R_e} + 1 \right) u$$

On a donc bien l'expression demandée en posant :

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{RC} \left(\frac{R}{R_e} + 1 \right) = \frac{1}{RC} \left(\frac{R + R_e}{R_e} \right) \quad \text{soit} \quad \tau' = \frac{RCR_e}{R + R_e}$$

II.12) Pour $t \rightarrow \infty$: $u(t) \rightarrow u_\infty = \text{cste}$ (régime permanent continu).

L'équation devient alors :

$$\frac{E}{RC} = \frac{1}{RC} \left(\frac{R}{R_e} + 1 \right) u_\infty \quad \Rightarrow \quad u_\infty = E \frac{R_e}{R + R_e}$$

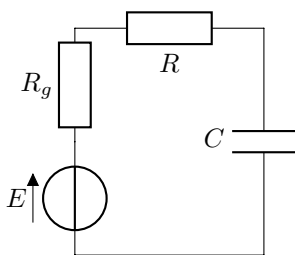
Pour $R_e = 1 \text{ M}\Omega = 10^6 \Omega$ et $R = 100 \text{ k}\Omega = 10^5 \Omega$: $u_\infty = E \frac{10^6}{10^5 + 10^6} = \frac{1}{1,1} E \approx 0,9 E$ ce qui est bien cohérent avec la figure 8 (droite) où la tension u tend vers 90% de E environ.

II.13) Figure de gauche : la courbe de modélisation semble passer par les incertitudes de tous les points.

Figure de droite : un écart nul entre τ et la modélisation est compatible avec les incertitudes sur τ car 0 se trouve à moins de deux barres d'incertitude pour tous les points.

Conclusion : le modèle $\tau = aR + b$ est bien **compatible avec les mesures**.

II.14) Dans ce modèle nous n'avons pas pris en compte la résistance interne du générateur qui n'est pas négligeable aux petits R . En adoptant un modèle de Thévenin, le circuit devient :



On néglige R_e dont l'influence est faible aux petits R $\left(\tau' = \frac{RCR_e}{R + R_e} \approx \frac{RCR_e}{R_e} = RC \text{ si } R \ll R_e \right)$.

On a donc le même circuit qu'au début du problème mais avec $R + R_g$ au lieu de R (résistances en série). Dans ce cas : $\tau = (R + R_g)C = RC + R_gC$

On a donc bien $\tau = aR + b$ avec $a = C$ et $b = R_gC$.

Grâce aux valeurs de la modélisation : $R_g = \frac{b}{C} = \frac{b}{a}$

$$\text{A.N. : } R_g = \frac{4,8 \times 10^{-5}}{97 \times 10^{-9}} \approx \frac{5 \times 10^{-5}}{1 \times 10^{-6}} = \boxed{50 \Omega}.$$

Cette valeur est cohérente avec les valeurs usuelles de résistances internes des générateurs GBF.

II.15) On a $a = C$ donc $C = a \pm u(a)$ soit $C = 97 \pm 1 \text{ nF}$.

Partie C. Mesure de g : gravimètre à chute libre

II.16) Système : aimant de masse m .

Référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

Bilan des forces : poids $\vec{P} = mg \vec{e}_z$; on néglige tout frottement.

Principe fondamental de la dynamique : $\vec{P} = m\vec{a}$.

Projeté sur \vec{e}_z : $mg = m\ddot{z}$ soit $\ddot{z} = g$.

On intègre : $\dot{z} = gt + \dot{z}(t=0)$. Or $\dot{z}(t=0) = 0$ (pas de vitesse initiale).

On intègre : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + z(t=0)$ où $z(t=0) = 0$ d'après l'énoncé.

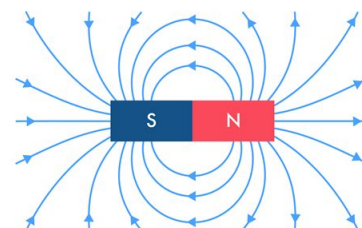
Pour conclure : $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

II.17) Par définition : $z(t_1) = d_1$ soit $d_1 = \frac{1}{2}gt_1^2$ donc $t_1 = \sqrt{\frac{2d_1}{g}} > 0$. De même $t_2 = \sqrt{\frac{2d_2}{g}}$.

II.18) Par définition : $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{2d_2} - \sqrt{2d_1})$ donc $g = \frac{(\sqrt{2d_2} - \sqrt{2d_1})^2}{\Delta t^2}$.

II.19) Carte de champ d'un aimant droit : voir ci-contre.

Le champ créé par l'aimant n'est pas uniforme. Lorsqu'il passe devant une bobine, **le flux magnétique varie** dans la bobine ce qui fait apparaître une force électromotrice induite d'après la loi de Faraday.



II.20) On mesure : $\Delta t = 6$ carreaux = $6 \times 36 = 216$ ms.

II.21)

— Instruction 1 : `somme = somme + liste_D[i-1]`

— Instruction 2 : `Dt_moy = somme / N`

II.22)

— Instruction 1 : `d1_k = np.random.uniform(d1 - Delta_d, d1 + Delta_d)`

— Instruction 2 : `d2_k = np.random.uniform(d2 - Delta_d, d2 + Delta_d)`

— Instruction 3 : `print(np.std(g_liste, ddof=1) / len(g_liste)**0.5 * 3**0.5)`

II.23) Cette valeur est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (unité de g).

II.24) Avec 1 seul C.S. : $u(g) = 0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ donc $g = 9,73 \pm 0,05 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.