On admet le théorème suivant. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge absolument et telle que, pour tout réel t, on ait $\sum_{n\geq 0} u_n \cos(nt) = 0$. Alors, nécessairement, $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré dans les questions précédentes que les hypothèses de ce théorème étaient vérifiées. Ainsi, on a démontré que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 0$.

Q18. En déduire la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{4\pi\alpha^{n+1}}{1 - \alpha^2}.$$

Q19. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2 - \cos(t)}.$$

On pourra s'aider de la question **Q5.**

PROBLÈME 2

Matrices aléatoires

Notations et définitions

Dans ce problème :

- on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: l'espace vectoriel des matrices carrées réelles sur $\mathbb{R}$ d'ordre 2 ;
- on note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
- pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$ et $A^\top$ désignent respectivement le déterminant, la trace et la matrice transposée de A ;
- pour tout événement E de l'univers Ω, $P(E)$ désigne la probabilité de E ;
- pour toute variable aléatoire X, $E(X)$ et $V(X)$ désignent respectivement l'espérance et la variance de X ;
- si Π est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors le réel positif $\mathrm{d}(A, \Pi) = \inf_{B\in\Pi} \|A - B\|$ désigne la distance de A à Π.

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires réelles discrètes sur un univers Ω. Toute matrice de la forme $\Sigma = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ s'appelle une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, pour tout $\omega \in \Omega$, $\Sigma(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & X_2(\omega) \\ X_3(\omega) & X_4(\omega) \end{pmatrix}$.

Puisque Σ est aléatoire, la probabilité d'un événement relatif à Σ se définit naturellement par :

$$P(\Sigma \in K) = P(\{\omega \in \Omega : \Sigma(\omega) \in K\})$$

où $K \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un ensemble de matrices.

Autrement dit, on mesure la probabilité des réalisations ω pour lesquelles la matrice $\Sigma(\omega)$ satisfait la condition définissant l'ensemble K.

Exemple

On s'intéresse à la probabilité que la matrice aléatoire Σ ne soit pas inversible. L'événement sur l'univers Ω correspondant aux matrices non inversibles est $\{\omega \in \Omega : \Sigma(\omega)$ n'est pas inversible$\}$.

On suppose que :

- X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, où p est un réel de $]0, 1[$;
- X_3 et X_4 sont deux variables aléatoires certaines avec $X_3(\Omega) = \{2\}$ et $X_4(\Omega) = \{3\}$.

Dans cet exemple, la matrice aléatoire $\Sigma = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$ peut prendre comme valeurs les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Parmi celles-ci, la seule matrice non inversible est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à $[X_1 = 0]$ et $[X_2 = 0]$.

La probabilité que la matrice Σ ne soit pas inversible est donc égale à $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1-p)^2$.

Les parties de ce problème sont indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre quelconque.
Les résultats de la **partie I** sont utiles pour la **partie III**.

Partie I - Généralités sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit le produit $\langle A, B\rangle$ par :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(AB^\top).$$

Q20. Soient $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, a_i et b_i sont des réels. Vérifier que $\langle A, B\rangle = \sum_{k=1}^{4} a_k b_k$.

Q21. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La norme associée à ce produit scalaire est notée : $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(AA^\top)}$.

Q22. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que la matrice $(A + A^\top)/2$ est symétrique et que la matrice $(A - A^\top)/2$ est antisymétrique. Montrer ensuite que ces deux matrices sont orthogonales pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q23. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est somme, d'une manière unique, d'une matrice symétrique M et d'une matrice antisymétrique N, où $M = (A + A^\top)/2$ et préciser l'expression de N en fonction de A.

Q24. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a l'égalité $\mathrm{d}(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|A - A^\top\|$.

Partie II - Matrice de Rademacher

Soient X_1 et Y_1 deux variables aléatoires réelles définies sur un univers Ω telles que :
- X_1 et Y_1 suivent la même loi, appelée loi de Rademacher, définie par :

$$X_1(\Omega) = \{-1; 1\} \quad \text{et} \quad P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \ ;$$

- X_1 et Y_1 sont indépendantes.

On se propose d'étudier quelques propriétés de la matrice aléatoire $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 1 & Y_1 \end{pmatrix}$.

On définit les deux variables aléatoires discrètes T_1 et Z_1 par :

$$T_1 = \mathrm{Tr}(\Sigma_1) = X_1 + Y_1\,, \quad Z_1 = \det(\Sigma_1) = X_1 Y_1\,.$$

Q25. Déterminer les valeurs de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.

Q26. Déterminer la loi de probabilité de T_1. Calculer $E(T_1)$ et $V(T_1)$.

Q27. Déterminer la loi de probabilité de Z_1. Calculer $E(Z_1)$ et $V(Z_1)$.

Partie III - Matrice géométrique

Soit p un réel dans $]0, 1[$. Dans cette partie, X_2 et Y_2 sont deux variables aléatoires telles que :
- X_2 et Y_2 suivent une loi géométrique de paramètre p, c'est-à-dire :

$$X_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_2 = k) = p(1-p)^{k-1} \ ;$$

- X_2 et Y_2 sont indépendantes.

On introduit la matrice aléatoire Σ_2 définie par $\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & X_2 - Y_2 \\ X_2 + Y_2 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus, on définit la variable aléatoire T_2 par :

$$T_2 = \mathrm{d}(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))\,.$$

Q28. Rappeler les valeurs de $E(X_2)$ et de $V(X_2)$.

Q29. Étude de $\mathrm{d}(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$.

a) À l'aide de la **partie I**, montrer que $T_2 = Y_2\sqrt{2}$.

b) Calculer $E(T_2)$ et $V(T_2)$.

Q30. Montrer que pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P\left(\left|T_2 - \frac{\sqrt{2}}{p}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{2(1-p)}{\delta^2 p^2}\,.$$

Q31. On choisit dans cette question $p = 1/2$.

a) Déterminer un $\delta > 0$ tel que :

$$P\left(\left|T_2 - 2\sqrt{2}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4}\,.$$

b) En déduire qu'avec une probabilité d'au moins $3/4$, on a :

$$\left|d(\Sigma_2, \mathcal{S}_2(\mathbb{R})) - 2\sqrt{2}\right| < 4\,.$$