

Fonctions de 2 variables.

1 Continuité des fonctions de 2 variables.

On se place dans l'espace \mathbb{R}^2 dont les points sont noté $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On note $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$ la norme euclidienne canonique.

La **distance** $d(M_1, M_2)$ entre les points $M_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $M_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ est définie par :

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \|(M_2 - M_1)\|$$

On rappelle l'inégalité triangulaire : si M_1, M_2, M_3 sont 3 points de \mathbb{R}^2 alors :

$$d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$$

Définition 1 Si un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 est fixé et $r > 0$ l'ensemble

$$B(M_0, r) = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(M_0, M) < r\}$$

est la **boule ouverte** ou **disque ouvert** de rayon r de centre M_0 .

Définition 2 Une partie U de \mathbb{R}^2 est dite **ouverte** dans \mathbb{R}^2 quand, pour tout point $M_0 = (x_0, y_0)$ de U , il existe $r > 0$ tel que : $B(M_0, r) \subset U$

L'inégalité triangulaire montre qu'une boule ouverte est ouverte au sens précédent ...

On fixe ici un ouvert U de \mathbb{R}^2 .

On considère maintenant une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

La fonction f , est dite **continue** sur U quand, pour tout point M_0 de U :

$$\forall \epsilon > 0, \exists r_\epsilon > 0, B(M_0, r_\epsilon) \subset U \text{ et } f(B(M_0, r_\epsilon)) \subset]f(M_0) - \epsilon, f(M_0) + \epsilon[$$

Les fonctions construites par sommes, produits, quotients, composées de fonctions élémentaires sont continues là où elles sont définies.

L'ensemble des fonctions continues sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 est un espace vectoriel réel noté $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$.

2 Dérivées partielles

On considère f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 .

Si $M_0 = (x_0, y_0) \in U$, on dispose des **applications partielles** f_x et f_y définies en M_0 :

$$f_x \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} / (x, y_0) \in U\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x, y_0) \end{cases}$$
$$f_y \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} / (x_0, y) \in U\} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \rightarrow f(x_0, y) \end{cases}$$

La fonction f admet des **dérivées partielles** en M_0 quand les applications partielles sont dérivables en x_0 et y_0 respectivement et on pose alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{df(x, y_0)}{dx} \right)_{x=x_0} = f'_x(x_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(\frac{df(x_0, y)}{dy} \right)_{y=y_0} = f'_y(y_0)$$

Attention, une fonction peut admettre en tout point des dérivées partielles sans être continue ...

Si f admet des dérivées partielles en tout point de U , les dérivées partielles sont des fonctions définies sur U .

Définition 3 La fonction f est dite **de classe \mathcal{C}^1** sur U quand les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U .

On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Les fonctions construites par sommes, produits, quotients, composées de fonctions élémentaires de classe \mathcal{C}^1 sont de classe \mathcal{C}^1 là où elles sont définies.

L'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 est un espace vectoriel réel noté $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Propriété 1 (Développement limité d'une fonction de classe \mathcal{C}^1) Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|)$$

On note :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h, k)\|)$$

Où :

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) dy$$

Qu'on écrit plus souvent sous la forme :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Définition 4 Si f est classe \mathcal{C}^1 sur U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ alors on pose

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

le **gradient** de f en (M_0)

On a ainsi :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rangle + o(\|(h, k)\|)$$

Le gradient est perpendiculaire aux lignes de niveaux de f et dirigé dans la direction dans laquelle f croit le plus vite.

3 Dérivée partielles et arc paramétré

On considère f une fonction à valeurs réelles, définie et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 .

Soit $u = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^2 .

Définition 5 La **dérivée de f suivant u** en $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ est la quantité :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = \langle \nabla f(x_0, y_0), u \rangle$$

C'est aussi la dérivée : $\left(\frac{d(f(M_0 + t.u))}{dt} \right)_{t=0}$.

On considère $\gamma : \begin{cases} I \rightarrow U \\ t \rightarrow (x(t), y(t)) \end{cases}$ un **arc de classe \mathcal{C}^1** (c'est à dire que les fonctions x et y sont de classe \mathcal{C}^1) à valeur dans U , I étant un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Son **vecteur vitesse** en $t \in I$ est $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Alors pour $t \in I$:

$$\left(\frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} \right) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \gamma'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

4 Changement de variable en dimension 2

On considère U et V 2 ouvert de \mathbb{R}^2 et

$$g_x : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \rightarrow g_x(u, v) \end{cases} \quad g_y : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \rightarrow g_y(u, v) \end{cases}$$

2 fonctions de classe \mathcal{C}^1 telle que la fonction (qu'il faut penser comme étant un changement de variables dans \mathbb{R}^2)

$$g : \begin{cases} V \rightarrow U \\ (u, v) \rightarrow (g_x(u, v), g_y(u, v)) \end{cases}$$

qu'on dit de classe \mathcal{C}^1 soit bien définie.

On considère de plus f une fonction à valeurs réelles, définie et de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Théorème 1 *La fonction*

$$f \circ g : \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \rightarrow f(g_x(u, v), g_y(u, v)) \end{cases}$$

est de classe \mathcal{C}^1 et pour $(u, v) \in V$.

On a sous forme abrégée :

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} f(g_x(u, v), g_y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} f(g_x(u, v), g_y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_y}{\partial v}$$

Sous forme développée

$$\frac{\partial}{\partial u} f(g_x(u, v), g_y(u, v)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g_x}{\partial u} \right) (u, v) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g_y}{\partial u} \right) (u, v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g_x}{\partial v} \right) (u, v) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (g(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial g_y}{\partial v} \right) (u, v)$$

5 Extremums

On considère f une fonction à valeurs réelles, définie et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$.

On a :

$\text{Max}_U(f) = f(x_0, y_0)$ quand , pour tout $M \in U : f(M) \leq f(M_0)$

$\text{Min}_U(f) = f(x_0, y_0)$ quand , pour tout $M \in U : f(M) \geq f(M_0)$

Dans les cas précédents, on, dit que f admet un extrémum **global** en M_0 (un tel point n'existe pas forcément).

On dit que f admet un extrémum **local** en M_0 quand il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $V \ni M_0$ et f_V admet un extrémum global en M_0 (un tel point n'existe pas forcément).

Définition 6 Dans les conditions précédentes, M_0 est un **point critique** de f quand

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$$

c'est à dire : $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

Le résultat central du calcul différentiel est :

Théorème 2 Tout extrémum local ou global d'une fonction réelle de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 est un point critique de f .