Fiche 83 : Fonctions de 2 variables.

Exercice 1

On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en $(0,0)$.

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition.

1. $f(x,y) = x^2 e^{xy}$;
2. $g(x,y,z) = x^2 y^3 \sqrt{z}$;
3. $h(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

Exercice 3

Déterminer les extrema de la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to xy \end{cases}$$

sur : $\mathbb{R}^2$, le disque trigonométrique fermé et $[0,1]^2$

Exercice 4

Déterminer sur $\mathbb{R}^2$ les points critiques, puis les minima et les maxima de

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y).$$

Exercice 5

Soient dans $\mathbb{R}^2$: $A = (0,a)$, $B = (b,-c)$ et $M = (x,0)$ $(a,b,c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée AMB à la vitesse v_1 de A à M et v_2 de M à B. On note $\alpha_1 = (\widehat{\vec{j}, \vec{MA}})$ $\alpha_2 = (\widehat{-\vec{j}, \vec{MB}})$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le temps de parcours entre A et B fixés est minimal lorsque $\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$.