

Déplacements rectilignes

Exercice 1 — Distance et temps de parcours.



Une voiture se déplace en ligne droite à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ?

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Exercice 2 — Distance parcourue.



Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1 , puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2 .

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$?

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ?

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0 , τ_1 et τ_2 ?

Exercice 3 — Longueur d'une piste de décollage.



Pour décoller, un avion doit atteindre la vitesse $v_d = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en bout de piste.

Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(a) 300 m

(b) 450 m

(c) 500 m

(d) 650 m

.....

Exercice 4 — Distance de freinage.



Une voiture roule à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m

(b) 46,7 m

(c) 55,9 m

(d) 63,5 m

.....

Coordonnées et projections de vecteurs

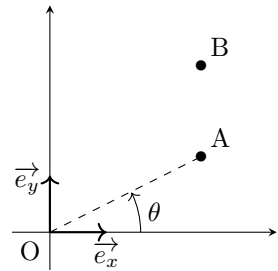
Exercice 5 — Composantes de vecteurs.



On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy).

Le vecteur $\vec{OA}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de $a = \|\vec{OA}\|$, $b = \|\vec{AB}\|$ et de l'angle θ .



a) $\vec{OA}$

b) $\vec{OB}$

c) $\vec{OA} + \vec{OB}$

d) $\vec{OA} - \vec{OB}$

Exercice 6 — Les coordonnées cylindriques.

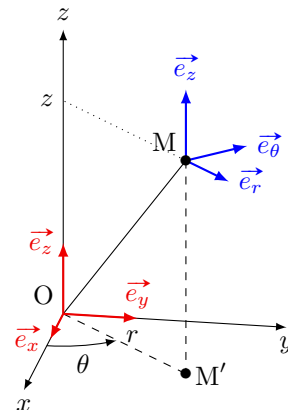


On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- et la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r , θ et z .



a) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cartésienne

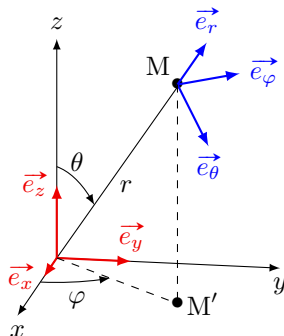
b) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cylindrique

c) Écrire le vecteur $\vec{OM}$ dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur $\vec{OM}$ dans la base cylindrique

Exercice 7 — Les coordonnées sphériques.

On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r , θ et φ .

a) Écrire la norme de $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de r et θ

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cartésienne

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base sphérique

e) Écrire le vecteur $\vec{e}_z$ dans la base sphérique

Exercice 8 — Jouons au tennis.

Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la balle à l'instant initial

b) Déterminer l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) de la balle à l'instant initial

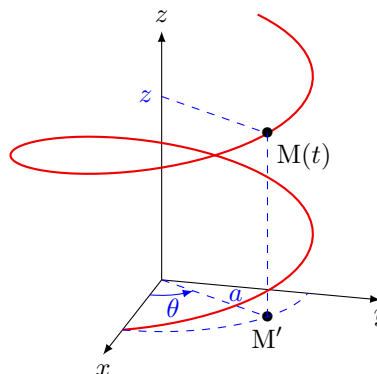
Dérivée de vecteurs

Exercice 9 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.



Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base cartésienne

b) Déterminer la norme de la vitesse

c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ dans la base cartésienne

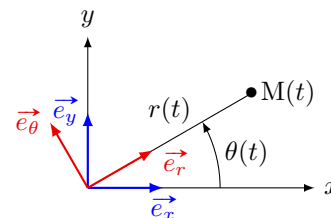
d) Déterminer la norme de l'accélération

Exercice 10 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.



On considère un point $M(t)$ en mouvement dans le plan (xOy) .

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



a) Exprimer le vecteur $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

b) En déduire la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer le vecteur $\vec{e}_x$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

d) Exprimer le vecteur $\vec{e}_y$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

e) En déduire l'expression de la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base polaire

Exercice 11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.

On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2. \end{cases}$

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

où $\dot{r} \vec{e}_r$ est appelée *vitesse radiale* et $r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ *vitesse orthoradiale*.

a) Déterminer la dimension de a

b) Déterminer la dimension de b

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a , b et t

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(M)$

Exercice 12 — Mouvement en spirale.

Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire (O, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$), les coordonnées de M(t) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t, \end{cases}$$

où r_0 , τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4,78 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$, $\tau = 2,0 \text{ s}$ et $r_0 = 4,0 \text{ cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale?

d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré?

e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M

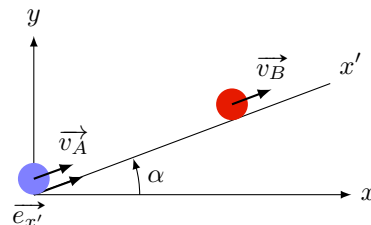
Étude de quelques mouvements

Exercice 13 — Collision sur plan incliné.



Deux billes évoluent sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale.

À $t = 0$, elles sont distantes d'une longueur L .



- La bille A possède une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_{x'}$.
Son accélération $\vec{a}(A) = -a \vec{e}_{x'}$ est constante au cours du temps.
Nous noterons $v_A(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .
- La bille B, quant à elle, n'a pas de vitesse initiale mais possède une accélération constante $\vec{a}(B) = a \vec{e}_{x'}$.
Nous noterons $v_B(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .

On donne $a = 3,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Exprimer $v_A(t)$ en fonction de a , t et v_0
- Exprimer $v_B(t)$ en fonction de a et t
- Déterminer la position x'_A de A en fonction du temps
- Déterminer la position x'_B de B en fonction du temps
- Déterminer la distance L maximale (en cm) pour qu'une collision puisse avoir lieu.

Exercice 14 — Chute libre.



On considère le point M de masse m et de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Il est lancé avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0z} \vec{e}_z$ à partir de l'origine O du repère dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

Tout frottement étant négligé, l'accélération de M est égale à $\vec{g}$ à tout instant.

- Exprimer $x(t)$ en fonction de v_{0x} et t
- Exprimer $z(t)$ en fonction de v_{0z} , g et t
- En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire z en fonction de x ,
c'est-à-dire une relation entre $x(t)$ et $z(t)$

Exercice 15 — Pauvre gazelle.



Un lion chasse une gazelle. Il court à la vitesse constante de $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La gazelle aperçoit le lion quand il est à 10 m de distance. Elle se met alors en fuite en accélérant à $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pour rattraper la gazelle, le lion se met aussi à accélérer au même instant à $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Combien de temps mettra le lion à rattraper la gazelle?
- Quelle distance aura parcourue la gazelle avant de se faire dévorer?

Réponses

- 1 a) $1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s}$
- 1 b) $8 \text{ min } 20 \text{ s}$
- 2 a) $a_0 \times \tau_1$
- 2 b) $\frac{a_0 \times \tau_1^2}{2}$
- 2 c) $a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)$
- 3 $\textcircled{\text{c}}$
- 4 $\textcircled{\text{b}}$
- 5 a) $a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$
- 5 b) $a\left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$
- 5 c) $a\left(2\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$
- 5 d) $-b\vec{e}_y$
- 6 a) $r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$
- 6 b) $r\vec{e}_r$
- 6 c) $r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z$
- 6 d) $r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- 7 a) $|r \sin(\theta)|$
- 7 b) $r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y)$
- 7 c) $r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) + r \cos(\theta)\vec{e}_z$
- 7 d) $r\vec{e}_r$
- 7 e) $\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta$
- 8 a) $49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- 8 b) $8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- 9 a) $a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z$
- 9 b) $\sqrt{(a\omega)^2 + b^2}$
- 9 c) $-a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$
- 9 d) $a\omega^2$

- 10 a) $\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$
- 10 b) $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$
- 10 c) $\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$
- 10 d) $\vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$
- 10 e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- 11 a) $\frac{L}{T}$
- 11 b) $\frac{1}{T^2}$
- 11 c) $a\vec{e}_r$
- 11 d) $2abt^2\vec{e}_\theta$
- 11 e) $a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta$
- 12 a) $r_0 e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \vec{e}_r + \omega \vec{e}_\theta\right)$
- 12 b) $r_0 e^{-t/\tau} \left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right) \vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right) \vec{e}_\theta\right)$
- 12 c) orthoradiale
- 12 d) décéléré
- 12 e) $r = r_0 e^{-\theta}$
- 13 a) $-at + v_0$
- 13 b) at
- 13 c) $-\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$
- 13 d) $\frac{1}{2}at^2 + L$
- 13 e) 67 cm
- 14 a) $v_{0x} t$
- 14 b) $-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z} t$
- 14 c) $z = -\frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x$
- 15 a) $1,7 \text{ s}$
- 15 b) $2,9 \text{ m}$

Corrigés

- 1 a)** La voiture avance à vitesse constante. Pour parcourir 100 km, il lui faudra le temps :

$$\tau = \frac{100 \text{ km}}{90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = 1,11 \text{ h} = 1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s}.$$

- 1 b)** Pour parcourir 100 km à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, il lui faudrait le temps $\tau' = \frac{100 \text{ km}}{80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = 1,25 \text{ h}$. Le temps de trajet serait donc allongé de $\Delta t = \tau' - \tau = 0,14 \text{ h} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$.

- 2 a)** L'accélération est constante durant le temps τ_1 et la vitesse initiale est nulle. La vitesse à un instant t vaut donc $v(t) = a_0 \times t$, d'où $v_1 = v(\tau_1) = a_0 \times \tau_1$.

- 2 b)** Pour $t \in [0, \tau_1]$, la vitesse est décrite par l'équation : $v(t) = a_0 \times t$. La distance parcourue à la date t s'écrit donc $d(t) = \frac{1}{2} a_0 \times t^2$. Ainsi, on a $d_1 = d(\tau_1) = \frac{a_0 \times \tau_1^2}{2}$.

- 2 c)** La distance totale parcourue est $d_{\text{tot}} = d_1 + d_2$, avec d_1 évaluée à la question précédente et d_2 la distance parcourue par le véhicule dans la seconde phase du mouvement où il progresse à vitesse constante.

Or, on a $d_2 = v_1 \times \tau_2$. Ainsi, on a $d_{\text{tot}} = a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2 \right)$.

- 3** À $t = 0$, l'avion a une vitesse nulle. Sa vitesse au temps t s'écrit alors $v(t) = a \times t$ et la distance qu'il parcourt vaut $d(t) = \frac{1}{2} a \times t^2$.

D'abord le temps t_d où l'avion atteint la vitesse v_d vaut $t_d = \frac{v_d}{a}$.

Pour faire l'application numérique, il nous faut exprimer la vitesse v_d en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. On a :

$$v_d = \frac{180 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et donc } t_d = \frac{50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 20 \text{ s}.$$

La longueur de la piste correspond à la distance parcourue pendant cette durée, donc :

$$L = \frac{1}{2} a \times t_d^2 = \frac{v_d^2}{2a} = \frac{(50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \times 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 500 \text{ m}.$$

- 4** La vitesse de la voiture à un instant t s'écrit $v(t) = v_i - a \times t$ avec :

$$v_i = 110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{110 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 30,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ainsi, le véhicule s'arrêtera à la date t_a telle que $v_i - a \times t = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On a $t_a = \frac{v_i}{a} = \frac{30,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 3,06 \text{ s}$.

La distance parcourue pendant le freinage vaut $d(t) = v_i \times t - \frac{1}{2} a \times t^2$.

La distance d'arrêt d_a correspond à la distance parcourue pendant la durée t_a : c'est $d_a = \frac{v_i^2}{2a} = 46,7 \text{ m}$.

- 5 a)** On a $\vec{OA} = a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$.

- 5 b)** On a $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = a\left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$.

- 5 c)** On a $\vec{OA} + \vec{OB} = a\left(2\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$.

- 5 d)** On a $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA} = -b\vec{e}_y$.

6 a) On a $\overrightarrow{OM'} = r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$.

6 b) On a $\overrightarrow{OM'} = r\vec{e}_r$.

6 c) On a $\overrightarrow{OM} = r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z$.

6 d) On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

7 a) On a $\|\overrightarrow{OM'}\| = |r \sin(\theta)|$.

7 b) On a $\overrightarrow{OM'} = r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y)$.

7 c) On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) + r \cos(\theta)\vec{e}_z$.

7 d) On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

7 e) Calculons les projections de $\vec{e}_z$ sur les trois vecteurs de la base sphérique. On a :

$$\begin{cases} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos(\theta) \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \\ \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

$$\vec{e}_z = (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi) \vec{e}_\varphi = \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta.$$

8 a) La vitesse de la balle à l'instant t_1 s'écrit $\vec{v}(M, t_1) = v_x(t_1)\vec{e}_x + v_y(t_1)\vec{e}_y$, avec :

$$v_x(t_1) \simeq \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}, \quad v_y(t_1) \simeq \frac{y(t_1 + \Delta t) - y(t_1)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta t = 0,05 \text{ s.}$$

Nous obtenons le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15
v_x (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	7	7	7	7
v_y (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	11,8	11,4	11,0	10,6

À l'instant initial, nous pouvons écrire : $v_0 \simeq \sqrt{(7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 + (11,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = 13,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

8 b) L'accélération de la balle à l'instant t_1 s'écrit $\vec{a}(M, t_1) = a_x(t_1)\vec{e}_x + a_y(t_1)\vec{e}_y$, avec :

$$a_x(t_1) \simeq \frac{v_x(t_1 + \Delta t) - v_x(t_1)}{\Delta t}, \quad a_y(t_1) \simeq \frac{v_y(t_1 + \Delta t) - v_y(t_1)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta t = 0,05 \text{ s.}$$

Ceci donne :

$$a_x(0) \simeq \frac{7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,05 \text{ s}} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad a_y(0) \simeq \frac{11,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 11,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,05 \text{ s}} = -8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

L'accélération initiale vaut donc $a_0 \simeq \sqrt{(0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2 + (-8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2} = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

9 a) On a $\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z$.

9 b) On a $\|\vec{v}(M)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(a\omega)^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + b^2} = \sqrt{(a\omega)^2 + b^2}$.

9 c) On a $\vec{a}(M) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = -a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$.

9 d) On a $\|\vec{a}(\text{M})\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = a\omega^2$.

11 a) On a $a = \frac{r}{t}$. Ainsi, a est homogène à une longueur sur un temps.

11 b) On a $b = \frac{\theta}{t^2}$. Ainsi, b est homogène à un angle sur un temps au carré. Comme un angle est une grandeur sans dimension, on a bien le résultat donné.

11 c) La vitesse radiale est $\vec{v}(\text{M})_r = \dot{r}\vec{e}_r = a\vec{e}_r$.

11 d) La vitesse orthoradiale est $\vec{v}(\text{M})_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 2abt^2\vec{e}_\theta$.

11 e) On a $\vec{v}(\text{M}) = a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta$.

12 a) On a $\vec{v}(\text{M}) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r_0e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\theta\right)$.

12 b) On a $\vec{a}(\text{M}) = r_0e^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right)\vec{e}_\theta\right)$.

12 c) On a $\omega = 4,78 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{4,78 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 0,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\frac{1}{\tau^2} - \omega^2 = \left(\frac{1}{2^2} - \omega^2\right) = 0 \text{ s}^{-2}$.

Ainsi, on a $\vec{a}(\text{M}, t) = -2\frac{r_0\omega}{\tau}e^{-t/\tau}\vec{e}_\theta$. L'accélération est donc orthoradiale.

12 d) On a $\vec{a}(\text{M}, t) \cdot \vec{v}(\text{M}, t) = r_0^2e^{-2t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right) - 2\frac{\omega^2}{\tau}\right) = r_0^2e^{-2t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau^3} - \frac{\omega^2}{\tau}\right) < 0$. Le mouvement est donc décéléré.

12 e) On a $r = r_0e^{-t/\tau}$ et $t = \frac{\theta}{\omega}$. Donc, on a $r = r_0e^{-\theta/(\omega \times \tau)} = r_0e^{-\theta}$ car $\omega\tau = 1$.

13 a) On a $\vec{a}(A) = \frac{d\vec{v}(A)}{dt}$. En projetant sur l'axe $(0, \vec{e}_{x'})$, on obtient $-a = \frac{dv_A}{dt}$. Puis, en calculant

$$\int_{v_0}^{v_A(t)} dv_A = \int_0^t -a dt,$$

on obtient $v_A(t) = -at + v_0$.

13 b) On a $\vec{a}(B) = \frac{d\vec{v}(B)}{dt}$. En projetant sur l'axe $(0, \vec{e}_{x'})$, on obtient $a = \frac{dv_B}{dt}$. Puis, en calculant

$$\int_0^{v_B(t)} dv_B = \int_0^t a dt,$$

on obtient $v_B(t) = at$.

13 c) Sur l'axe $(0, \vec{e}_{x'})$, on a $v_A(t) = \frac{dx'_A}{dt}$. Donc, on a $\int_0^{x'_A(t)} dx'_A = \int_0^t v_A dt = \int_0^t (-at + v_0) dt$.

Donc, on a $x'_A(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t$.

13 d) Sur l'axe $(0, \vec{e}_{x'})$, on a $v_B(t) = \frac{dx'_B}{dt}$. Donc, on a $\int_L^{x'_B(t)} dx'_B = \int_0^t v_B dt = \int_0^t at dt$.

Donc, on a $x'_B(t) = \frac{1}{2}at^2 + L$.

13 e) Nous observerons une collision à la date t_1 si $x'_A(t_1) = x'_B(t_1)$ donc si $-\frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + L$.

Donc, t_1 doit être une solution réelle positive de l'équation suivante :

$$t_1^2 - \frac{v_0}{a}t_1 + \frac{L}{a} = 0,$$

ce qui impose une valeur positive pour son discriminant $\Delta = \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - 4\frac{L}{a} \geq 0$. Donc, on doit avoir $L \leq \frac{v_0^2}{4a}$.

Après application numérique, on trouve que la distance L doit vérifier $L \leq 67$ cm.

14 a) On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$. En projetant, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g. \end{cases}$$

Donc, on a $v_x = C^{\text{te}} = v_{0x}$. En intégrant une deuxième fois, vu que M est initialement en O, on obtient : $x(t) = v_{0x}t$.

14 b) On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$. En projetant, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g. \end{cases}$$

Donc, en intégrant, on a $\int_{v_{0z}}^{v_z(t)} dv_z = \int_0^t -g \cdot dt$ donc $v_z = -gt + v_{0z}$. En intégrant une deuxième fois, vu que M est initialement en O, on obtient :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t.$$

14 c) À partir de l'expression de $x(t)$, on peut écrire $t = x/v_{0x}$. On remplace t par cette expression dans z :

$$z = -\frac{1}{2}g(x/v_{0x})^2 + v_{0z}x/v_{0x}.$$

Finalement, on trouve l'équation $z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$.

15 a) On suppose que le lion et la gazelle se déplacent en ligne droite sur l'axe (Ox). On prend l'origine des temps au moment où la gazelle aperçoit le lion et l'origine de l'axe (Ox) à la position du lion quand la gazelle l'aperçoit.

On intègre deux fois pour avoir la position du lion x_L puis celle de la gazelle x_G en fonction de temps :

$$\begin{cases} x_L(t) = v_0t + \frac{1}{2}a_Lt^2 \\ x_G(t) = d_0 + \frac{1}{2}a_Gt^2, \end{cases}$$

avec $v_0 = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a_L = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_G = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $d_0 = 10 \text{ m}$.

Puis, on égalise ces deux positions pour déterminer le temps t_1 où le lion attrape la gazelle. On obtient une équation du second degré sur t_1 :

$$\frac{a_L - a_G}{2}t_1^2 + v_0t_1 - d_0 = 0. \quad (*)$$

On résout cette équation du second degré qui admet deux racines réelles dont l'une est négative. Le temps cherché est la racine positive : c'est $t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{\Delta}}{a_L - a_G}$ où $\Delta = v_0^2 + 2d_0(a_L - a_G)$ est le discriminant de l'équation (*).

On trouve finalement $t_1 = 1,7 \text{ s}$.

15 b) La gazelle aura parcouru la distance $d = \frac{1}{2}a_Gt_1^2$, avec $a_G = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $t_1 = 1,7 \text{ s}$ le temps mis par le lion pour rattraper la gazelle. Finalement, on trouve $d = 2,9 \text{ m}$.