

Exercice 2. Calculs numériques

1. $f = \frac{1}{28 \times 10^{-6} \text{ s}} = 3,6 \times 10^4 \text{ Hz}$ (arrondi à 2 chiffres significatifs).
2. $p = 2 \times (L + \ell) = 40,0 \text{ cm} = 0,400 \text{ m}$ (précision au mm) ; $S = L \times \ell = 1,46 \times 10^{-1} \text{ m} \times 5,4 \times 10^{-2} \text{ m} = 7,9 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (arrondi à 2 chiffres significatifs).
3. $c = \sqrt{9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 45 \times 10^{-2} \text{ m}} = 2,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (arrondi à 2 chiffres significatifs).
4. $\rho = \frac{28,96 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} \times 1,02 \times 10^5 \text{ Pa}}{8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times (25 + 273,15) \text{ K}} = 1,19 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (arrondi à 3 chiffres significatifs).

Exercice 3. Période d'un pendule

1. La relation est homogène ssi : $T = M^\alpha \times L^\beta \times (L T^{-2})^\gamma$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} \text{homogénéité pour } M : & 0 = \alpha \\ \text{homogénéité pour } L : & 0 = \beta + \gamma \\ \text{homogénéité pour } T : & 1 = -2\gamma \end{cases}$$

On résout : $\alpha = 0$; $\beta = \frac{1}{2}$; $\gamma = -\frac{1}{2}$. Pour conclure : $T = k \sqrt{\frac{L}{g}}$.

2. On remarque que la masse n'intervient pas dans l'expression. C'est normal car la masse apparaît à deux reprises dans l'application de la deuxième loi de Newton : une fois en produit de l'accélération, et une fois en produit de la pesanteur dans l'expression du poids. Ces deux contributions s'annulent (comme dans le cas de la chute libre).

$$3. \quad k = T \sqrt{\frac{g}{L}} = 6,26 \approx 2\pi.$$

Exercice 4. Troisième loi de Kepler

1. L'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles m_A et m_B situées à la distance d s'exprime par la force attractive $F = \frac{\mathcal{G} m_A m_B}{d^2}$.
2. Ainsi $\mathcal{G} = F d^2 / (m_A m_B)$ d'où $\dim(\mathcal{G}) = \frac{M L T^{-2} \times L^2}{M^2} = M^{-1} L^3 T^{-2}$.
3. On pose $T = k a^\alpha \mathcal{G}^\beta M_S^\gamma$.
 $\dim(T) = T$ et $\dim(k a^\alpha \mathcal{G}^\beta M_S^\gamma) = 1 \times L^\alpha \times (M^{-1} L^3 T^{-2})^\beta \times M^\gamma = M^{\gamma-\beta} L^{\alpha+3\beta} T^{-2\beta}$.

On identifie pour assurer l'homogénéité de la relation : $\gamma - \beta = 0$; $\alpha + 3\beta = 0$ et $-2\beta = 1$.

Solution : $\beta = \gamma = -1/2$, $\alpha = 3/2$.

$$\text{Conclusion : } T = k a^{3/2} \mathcal{G}^{-1/2} M_S^{-1/2} = k \sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G} M_S}}.$$

On vérifie la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{k^2}{\mathcal{G} M_S} = \text{cste}$ où $k = 2\pi$.

Exercice 5. Cuisson d'un poulet

1. D'après l'expression fournie, la dimension de la capacité thermique massique est celle d'une énergie ($M L^2 T^{-2}$) divisée par une température et par une masse, soit :

$$\dim(c) = L^2 T^{-2} \Theta^{-1}.$$

La dimension de la conductivité thermique est celle d'une puissance ($M L^2 T^{-3}$) divisée par une longueur et par une température, soit $\dim(\lambda) = M L T^{-3} \Theta^{-1}$.

2. On pose l'expression suivante pour la durée de cuisson : $\Delta t = k d^\alpha \rho^\beta c^\gamma \lambda^\delta$ avec k un facteur numérique.

La relation est homogène ssi : $T = L^\alpha \times (M L^{-3})^\beta \times (L^2 T^{-2} \Theta^{-1})^\gamma \times (M L T^{-3} \Theta^{-1})^\delta$

On obtient le système :

$$\begin{cases} \text{homogénéité pour } M : & 0 = \beta + \delta \\ \text{homogénéité pour } L : & 0 = \alpha - 3\beta + 2\gamma + \delta \\ \text{homogénéité pour } T : & 1 = -2\gamma - 3\delta \\ \text{homogénéité pour } \Theta : & 0 = -\gamma - \delta \end{cases}$$

On résout : $\alpha = 2$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$; $\delta = -1$. En conclusion : $\Delta t = k \frac{\rho c d^2}{\lambda}$.

3. Le volume d'un poulet est proportionnel à son diamètre au cube, donc sa masse m est proportionnelle à ρd^3 . Inversement le diamètre est proportionnel à $\sqrt[3]{m/\rho}$.

Ainsi, en supposant la masse volumique d'un poulet constante, la durée de cuisson s'exprime de la façon suivante en fonction de sa masse : $\Delta t = k' \frac{\rho^{1/3} c m^{2/3}}{\lambda}$ (k' est un facteur numérique, différent de k).

c , ρ et λ étant supposés constants pour un poulet, on en conclut que la durée de cuisson est proportionnelle à $m^{2/3}$. Ainsi en multipliant la masse par 2, la durée de cuisson de cuisson est multipliée par $2^{2/3} = 1,6$.

Pour conclure, la durée de cuisson d'un poulet de 2 kg est de 1,6 h soit 95 min environ.